CALCOLO NUMERICO 1 (22 Novembre 2012) - Prima prova in itinere

22/11/2012
n° 1
1° itinere

1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$$

e stabilire per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$$

C.E. $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{x} \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$ $0 \leq x \leq 1$

Non derivabile $x=0$, $x=1$

Errore relativo $\frac{|\Delta x|}{|x|}$, $\frac{|\Delta f|}{|f|}$ non def in $x=0$, $x=1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{x}}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$K_f(x) = \left| \frac{x \cdot \frac{1}{4\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} \right| = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{1-\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$K_f(x) < 10$ $\frac{1}{4} \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} < 10$

$$\sqrt{x} < 40\left(4 - \sqrt{x}\right)$$

$\sqrt{x} < 40 - 40\sqrt{x}$ $41\sqrt{x} < 40$

$\sqrt{x} < \frac{40}{41}$ $x < \frac{1600}{1681}$

$$x \in \left(0, \frac{1600}{1681}\right)$$

2) Si consideri la funzione $f(x) = 1 + 4xe^{(2x)}$, $x \in [0, 3/2]$,

1. trovare il polinomio che interpoli la funzione f nei nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3/2$;
2. trovare la spline lineare interpolante scegliendo come nodi della suddivisione dell'intervallo $[0, 3/2]$ i nodi del punto precedente;
3. stimare il numero M di sottointervalli di uguale ampiezza necessari per approssimare la funzione f con una spline lineare interpolante a meno di un errore di 10^{-2}.

MI

1ª itinere

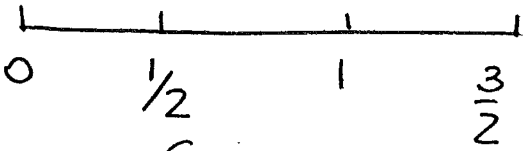
22/11/2012

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y_i	1	$1+2e$	$1+4e^2$	$1+6e^3$

$$
\begin{array}{llllll}
0 & 1 & & & & \\
& & 4e & & & \\
\frac{1}{2} & 1+2e & & 8e^2-8e & & \\
& & 8e^2-4e & & (12e^3-24e^2+12e)\cdot\frac{2}{3} & \\
1 & 1+4e^2 & & 12e^3-16e^2+4e & = 8e^3-16e^2+8e & \\
& & 12e^3-8e^2 & & & \\
\frac{3}{2} & 1+6e^3 & & & &
\end{array}
$$

$$
p_3(x) = 1 + 4ex + (8e^2-8e)\left(x^2-\frac{1}{2}x\right) + (8e^3-16e^2+8e)\left(x^2-\frac{1}{2}x\right)(x-1)
$$

2)



$$S_1(x) = \begin{cases} S_1^1(x) & [0, \frac{1}{2}) \\ S_1^2(x) & [1/2, 1) \\ S_1^3(x) & [1, \frac{3}{2}] \end{cases}$$

$$S_1^1(x) = 4ex + 1$$

$$S_1^2(x) = (8e^2 - 4e)\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 + 2e =$$

$$(8e^2 - 4e)x - 4e^2 + 4e + 1$$

$$S_1^3(x) = (12e^3 - 8e^2)(x - 1) + 1 + 4e^2 =$$

$$(12e^3 - 8e^2)x - 12e^3 + 12e^2 + 1$$

3)

$$h = \frac{\frac{3}{2}}{M} = \frac{3}{2M}$$

$$\underbrace{\frac{h^2}{8} \max_{[0,\frac{3}{2}]} |f''(x)|}_{K} = \frac{1}{8}\frac{9}{4M^2}K = \frac{9}{32M^2}K$$

K:

$$f'(x) = 4e^{2x} + 4x \cdot 2e^{2x} = 4(1+2x)e^{2x}$$

$$f''(x) = 4\left[2e^{2x} + (1+2x)\cdot 2e^{2x}\right] = 8e^{2x}(2+2x) = 16e^{2x}(1+x)$$

$$f'''(x) = 16\left[e^{2x} + (1+x)\cdot 2e^{2x}\right] = 16e^{2x}(3+2x) \geq 0 \text{ in } \left[0, \frac{3}{2}\right]$$

$$K = f''\left(\frac{3}{2}\right) = 16e^{2\cdot\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{2}\right) = 16e^3 \cdot \frac{5}{2} = 40e^3$$

Stima $\frac{9}{\cancel{32}_{4} M^2} \cdot \cancel{40}^{5} e^3 < \frac{1}{100}$

$$M^2 > \frac{45 \cdot \cancel{100}^{25} \cdot e^3}{\cancel{4}} = 1125e^3 \qquad M > \sqrt{1125e^3} \doteq 150.32$$

$$\bar{M} = 151$$

22/11/2012 1

1° itinere

3) Determinare i coefficienti a_0, a_1, b_0, b_1 in modo che la formula di quadratura:

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x \approx h[a_0 f(0) + a_1 f(h)] + h^2[b_0 f'(0) + b_1 f'(h)]$$

sia esatta per polinomi di grado 3.

Applicare la formula trovata all'integrale definito

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Utilizzando la stima asintotica dell'errore, stimare quanti sottointervalli sono necessari affinchè l'errore assoluto relativo all'approssimazione di I con il metodo dei trapezi compositi sia inferiore a 10^{-3}.

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx h\left[a_0 f(0) + a_1 f(h)\right] + h^2\left[b_0 f'(0) + b_1 f'(h)\right]$$

- $r=0 \quad f(x)=1 \quad f'(x)=0$

$$\int_0^h 1 \cdot dx = h \qquad \Rightarrow a_0 + a_1 = 1$$

$$FQ = h(a_0+a_1)$$

- $r=1 \quad f(x)=x \quad f'(x)=1$

$$\int_0^h x\,dx = \frac{h^2}{2} \qquad \Rightarrow a_1 + b_0 + b_1 = \frac{1}{2}$$

$$FQ = h\left[\cancel{a_0 \cdot 0} + a_1 \cdot h\right] + h^2\left[b_0 + b_1\right]$$

- $r=2 \quad f(x)=x^2 \quad f'(x)=2x$

$$\int_0^h x^2\,dx = \frac{x^3}{3} \qquad \Rightarrow a_1 + 2b_1 = \frac{1}{3}$$

$$FQ = h\left[\cancel{a_0 \cdot 0^2} + a_1 \cdot h^2\right] + h^2\left[\cancel{b_0 \cdot 2 \cdot 0} + b_1 \cdot 2h\right]$$

• $r=3 \qquad f(x)=x^3 \qquad f'(x)=3x^2$

$$\int_0^h x^3\,dx = \frac{h^4}{4} \qquad \Longrightarrow a_1+3b_1=\frac{1}{4}$$

$$FQ = h\left[\cancel{a_0\cdot 0^3} + a_1 h^3\right] + h^2\left[\cancel{b_0\, 3\cdot 0^2} + b_1\cdot 3h^2\right]$$

SISTEMA

$$\begin{cases} a_0+a_1=1 \\ a_1+b_0+b_1=\frac{1}{2} \\ \boxed{\begin{array}{l} a_1+2b_1=\frac{1}{3} \\ a_1+3b_1=\frac{1}{4}\end{array}} \end{cases}$$

$$b_1=-\frac{1}{12} \qquad \Rightarrow a_1=\frac{1}{3}-2\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

1^a) $a_0 = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

2^a) $\cancel{\frac{1}{2}}+b_0-\frac{1}{12}=\cancel{\frac{1}{2}} \qquad b_0=\frac{1}{12}$

$$FQ = h\left[\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(h)\right]+h^2\left[\frac{1}{12}f'(0)-\frac{1}{12}f'(h)\right]$$

Applicazione

$$h = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = x^2 \sin x$$

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x = x\left(2 \sin x + x \cos x\right)$$

$$FQ = \frac{\pi}{2}\left[\cancel{\frac{1}{2} 0} + \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}\right] + \frac{\pi^2}{4}\left[0 - \frac{1}{12}\frac{\pi}{2}(2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot 2 =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{1}{3}$$

Stima asintotica $\quad H = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{M} = \dfrac{\pi}{2M}$

$$\left|\frac{H^2}{12}\left[f'(0) - f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right| =$$

$$\left|\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{\pi}{2M}\right)^2\left[0 - \frac{\pi}{\cancel{2}}(\cancel{2})\right]\right| =$$

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{\pi^2}{4M^2}\cdot\pi = \frac{\pi^3}{48}\cdot\frac{1}{M^2} < \frac{1}{1000}$$

$$M^2 > \frac{\pi^3 \cdot 1000}{48} \qquad M > \sqrt{\frac{\pi^3 \cdot 1000}{48}} \approx 25.41$$

$$\overline{M} = 26$$