CALCOLO NUMERICO 1 (21 Novembre 2013) - Prima prova in itinere

1) Assegnato un parametro reale $a > 0$, calcolare il numero di condizionamento $K_{f_a}(x)$ della funzione

$$f_a(x) = x\sqrt{x-a}$$

e stabilire, in funzione di $a$, per quali $x$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_{f_a}(x) < 10$.

C.E. $x > a$ $\left( f_a(x) \neq 0 \text{ per def. } K_{f_a}(x) \right)$

$$K_{f_a}(x) = \frac{|x f_a'(x)|}{|f_a(x)|}$$

$$f_a'(x) = \sqrt{x-a} + \frac{x}{2\sqrt{x-a}} = \frac{3x-2a}{2\sqrt{x-a}}$$

$$K_{f_a}(x) = \left|\frac{x(3x-2a)}{2x(x-a)}\right| = \left|\frac{3x-2a}{2(x-a)}\right| = \frac{3x-2a}{2(x-a)}$$ essendo $x > a$

$$\frac{3x-2a}{2(x-a)} < 10$$

$$3x - 2a < 20(x-a)$$

$$17x > 18a \qquad x > \frac{18}{17}a$$

2) Si consideri il polinomio di secondo grado $p_2$ che interpoli una funzione $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ nei punti $\{-a, 0, a\}$, con parametro $a \in (0, 1]$.

Milano

1^ itinere

21-11-2013

2.1) Trovare una maggiorazione dell'errore $\max_{-1\le x\le 1} |f(x) - p_2(x)|$ nel caso in cui $a = 1$ ed $f(x) = e^{-2x^2}$.

2.2) Trovare il valore di $a$ che rende minima la quantità

$$\max_{-1\le x\le 1} |(x - a)x(x + a)|.$$

2.1) $\max_{-1\le x\le 1} |f(x)-p_2(x)| \le \max_{-1\le x\le 1} \frac{1}{3!} |(x+1)x(x-1)| \max_{-1\le t\le 1} |f^{(3)}(t)|$

$\omega(x) = x(x^2-1) = x^3 - x \qquad \omega'(x) = 3x^2 - 1$

$\max_{-1\le x\le 1} |\omega(x)| = \left|\omega\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

$f(t) = e^{-2t^2} \qquad f'(t) = -4t\,e^{-2t^2} \qquad f''(t) = 4e^{-2t^2}(4t^2-1)$

$f'''(t) = 16t\,e^{-2t^2}(3-4t^2) = 16\,e^{-2t^2}\underbrace{(3t-4t^3)}_{\varphi(t)}$

$|f'''(t)| \le 16 \cdot 1 \cdot 1 = 16$

$\varphi(0)=0 \quad \varphi(\pm 1) = \mp 1$

$\varphi'(t) = 3 - 12t^2 = 0 \quad t = \pm\frac{1}{2}$

$\varphi(\pm\frac{1}{2}) = \pm 1$

$\Longrightarrow \max_{-1\le x\le 1} |f(x)-p_2(x)| \le$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{9}\sqrt{3}\cdot 16 = \frac{16}{27}\sqrt{3} \approx 1.0264$$

2.2) $\min_{a\in(0,1]} \underbrace{\max_{-1\le x\le 1} |(x-a)x(x+a)|}_{E(a)}$

$E(a) = \max_{-1\le x\le 1} |x^3 - a^2 x| = \max_{-1\le x\le 1} |\varphi(x)| \qquad \varphi(x) = x^3 - a^2 x$

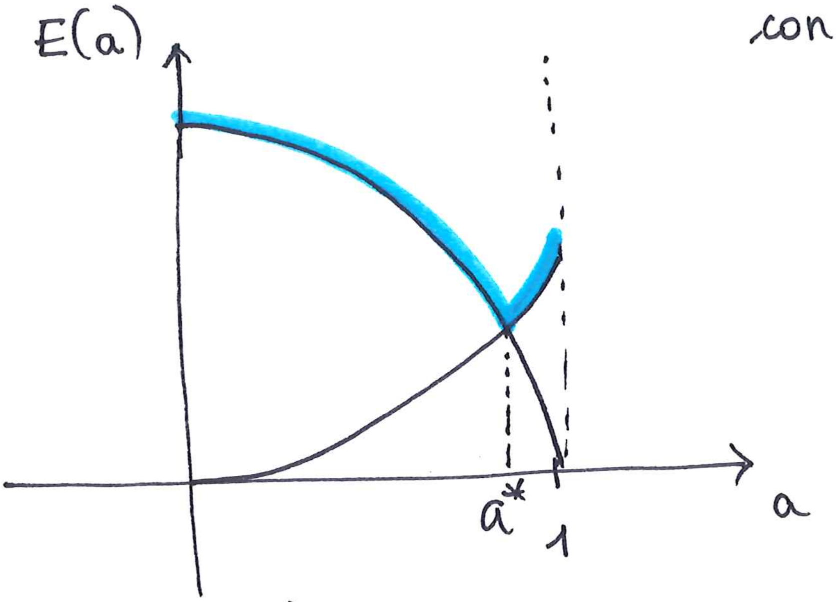
$\varphi'(x) = 3x^2 - a^2 \ge 0 \qquad x \le -\frac{a}{\sqrt{3}} \quad \vee \quad x \ge \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad \text{con } \frac{a}{\sqrt{3}} < 1$

$$\varphi\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{a^2}{3} - a^2\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a^3}{\sqrt{3}}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$$

$$\left|\varphi\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\right| = \frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$$

$$E(a) = \max\left\{\frac{2\sqrt{3}a^3}{9}, |\varphi(\pm 1)|\right\} = \max\left\{\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3; 1-a^2\right\}$$

con $a \in (0,1]$




$$E(a^*) = \min_{a\in(0,1]} E(a)$$

Trovo $a^*$: $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3 = 1-a^2$ $\quad 2\sqrt{3}a^3 + 9a^2 - 9 = 0$

Cerco la soluzione come: $a = k\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}\cdot k^3 3\sqrt{3} + 9\cdot 3k^2 - 9 = 0$ $\quad 18k^3 + 27k^2 - 9 = 0$ $\quad 2k^3 + 3k^2 - 1 = 0$

Scompongo e ottengo $(k+1)^2(2k-1) = 0$

$k = -1$ $\quad a^* = -\sqrt{3}$ non accettabile

$k = \frac{1}{2}$ $\quad a^* = \frac{\sqrt{3}}{2}$

N.B. $a^*$ è lo zero positivo del polinomio di Chebyshev di grado 3: $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

3) Stimare il numero minimo di intervalli di uguale ampiezza in cui suddividere l'intervallo $[0, 5]$, affinchè l'errore che si commette interpolando con una spline lineare la funzione $f(x) = 1/(1 + e^x)$ sia minore di $10^{-2}$.

MILANO

1^ itinere

21-11-2013

$$H = \frac{5}{M}$$

$$\underbrace{\max_{0 \le x \le 5} |f(x) - S_1(x)|}_{E} \le \frac{1}{8} H^2 \max_{-1 \le t \le 1} |f''(t)|$$

$$f(t) = \frac{1}{1+e^t} \qquad f'(t) = -\frac{e^t}{(1+e^t)^2} \qquad f''(t) = \frac{e^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3}$$

$$|f''(t)| \le \frac{e^5(e^5-1)}{8}$$

$$E \le \frac{1}{64} e^5(e^5-1) \frac{25}{M^2} < 10^{-2}$$

$$M > \frac{5}{8} \cdot 10 \sqrt{e^5(e^5-1)} = 924.45$$

$$\overline{M} = 925$$

N.B. Sono possibili anche altre maggiorazioni:

1) Calcolo $f'''(t)$ .....

2) $$\frac{e^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3} \underset{t \in [0,5]}{<} \frac{e^t(e^t+1)}{(1+e^t)^3} = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \dots$$

4) Data la formula di quadratura numerica

$$I = \int_{-h}^{h} f(x)\mathrm{d}x \approx h[\omega_1 f(-\alpha h) + \omega_2 f(0) + \omega_1 f(\alpha h)], \quad 0 < \alpha < 1, \; h > 0$$

4.1) trovare $\omega_1$ e $\omega_2$ in funzione di $\alpha$ in modo tale che la formula abbia grado di precisione almeno 3.

4.2) Esistono valori di $\omega_1$, $\omega_2$, $\alpha$ per i quali il grado di precisione sia maggiore di 3?

MILANO
1^ dicembre
21-11-2013

• $r=0$ $\quad f=1$

$\int_{-h}^{h} dx = 2h \quad \Big| \quad h[w_1+w_2+w_1] = h(2w_1+w_2)$

$\Rightarrow \boxed{2w_1+w_2=2}$

• $r=1$ e $\forall\, r$ dispari $\quad I = \tilde{I}$ per simmetria....

• $r=2$ $\quad f=x^2$

$\int_{-h}^{h} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-h}^{h} = \frac{2}{3}h^3 \quad \Big| \quad h[w_1\alpha^2h^2 + w_1\alpha^2h^2] = 2w_1\alpha^2h^3$

$\Rightarrow \boxed{w_1\alpha^2 = \frac{1}{3}}$

Risposta 4.1) $\quad w_1 = \frac{1}{3\alpha^2}$ ; $w_2 = 2 - \frac{2}{3\alpha^2}$

4.2) $r=4$ $\quad f=x^4$

$\int_{-h}^{h} x^4 dx = \frac{2}{5}h^5 \quad \Big| \quad h[w_1\alpha^4h^4 + w_1\alpha^4h^4] = 2w_1\alpha^4h^5$

$\Rightarrow \boxed{w_1\alpha^4 = \frac{1}{5}}$

$$\begin{cases} 2w_1+w_2=2 \\ w_1\alpha^2 = \frac{1}{3} \\ w_1\alpha^4 = \frac{1}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_2 = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9} \\ w_1 = \frac{5}{9} \\ \alpha^2 = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

E' la formula di G.L. a 3 punti relativa all'intervallo $[-h, h]$. Nodi $\pm\sqrt{\frac{3}{5}}h$, 0

Pesi $\frac{5}{9}h$, $\frac{8}{9}h$, $\frac{5}{9}h$

5) Si consideri una formula di quadratura interpolatoria di tipo Gaussiano con $n \geq 1$ nodi, $\tilde{I} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$, si dimostri che i pesi $\alpha_i$ sono non negativi. *[Suggerimento: utilizzare come funzione f da integrare un opportuno polinomio con integrale non negativo per cui la formula risulti esatta]*

MILANO

1^ itinere

21-11-2013

Formula di tipo Gaussiano a n nodi ha grado di precisione $2n-1$

Sià $f_i(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2 \dots (x-x_{i-1})^2(x-x_{i+1})^2 \dots (x-x_n)^2$

(i-esimo polinomio di Lagrange, relativo all'interpolazione di grado $n-1$, $\Rightarrow$ elevato alla seconda .... a meno di una costante ....)

$$f_i \in \mathbb{P}_{2n-2} \quad , \quad f_i > 0 \quad x \neq x_j \ \forall i \neq j$$

$$\Rightarrow \int_a^b f_i(x)\,dx > 0 \qquad \begin{matrix} f_i(x_j) = 0 & i \neq j \\ f_i(x_i) > 0 & \end{matrix}$$

Per l'esattezza della formula $\tilde{I}$, $\forall q \in \mathbb{P}_{2n-1}$

$$\int_a^b f_i(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_i(x_k) = \alpha_i f_i(x_i)$$

$$\alpha_i = \underbrace{\frac{1}{f_i(x_i)}}_{>0} \underbrace{\int_a^b f_i(x)\,dx}_{>0}$$