CALCOLO NUMERICO 1 (23 Gennaio 2014) - Seconda prova in itinere

1) La funzione $f(x) = e^x - 10x - 1$ ha due radici: $\alpha = 0$ e $\beta \in (n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Si determini il valore di n. Si stabilisca inoltre il numero di passi k del metodo di bisezione applicato all'intervallo $(n, n+1)$ affinché l'iterata x_k verifichi la maggiorazione

$$\frac{|\beta - x_k|}{|\beta|} < 10^{-5}.$$

$e^x - 10x - 1 = 0 \qquad e^x = 10x + 1$

x	e^x	$10x+1$
0	1	$=$ 1
1	e	$<$ 11
2	e^2	$<$ 21
3	e^3	$<$ 31
4	e^4	$>$ 41

$\alpha = 0$

$\beta \in (3, 4)$

$$|\beta - x_k| \leq \frac{4-3}{2^k} \qquad |\beta - x_k| \leq \frac{1}{2^k}$$

$$|\beta| = \beta > 3 \qquad \frac{1}{|\beta|} < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{|\beta - x_k|}{|\beta|} \leq \frac{|\beta - x_k|}{3} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^k}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^k} < 10^{-5}$$

$$2^k > \frac{10^5}{3} \qquad k > \left(\log \frac{10^5}{3}\right) \cdot \frac{1}{\log 2} \approx 15.02\ldots$$

$\approx 33333\ldots$

$$\bar{k} = 16$$

MI_ MATE

2^ prova in itinere

23/01/2014

2) Data la funzione $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)$ studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l' ordine dei metodi iterativi $x_{n+1} = [g(x_n)]^k$ per la ricerca dei punti fissi delle funzioni $[g(x)]^k$, con $k = 2$ e $k = 3$.

•• $x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n+1)^2$ $\quad g(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2$

$x = g(x)$

$x = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ $\quad x^2 - 2x + 1 = 0$ $\quad x_{1,2} = 1$

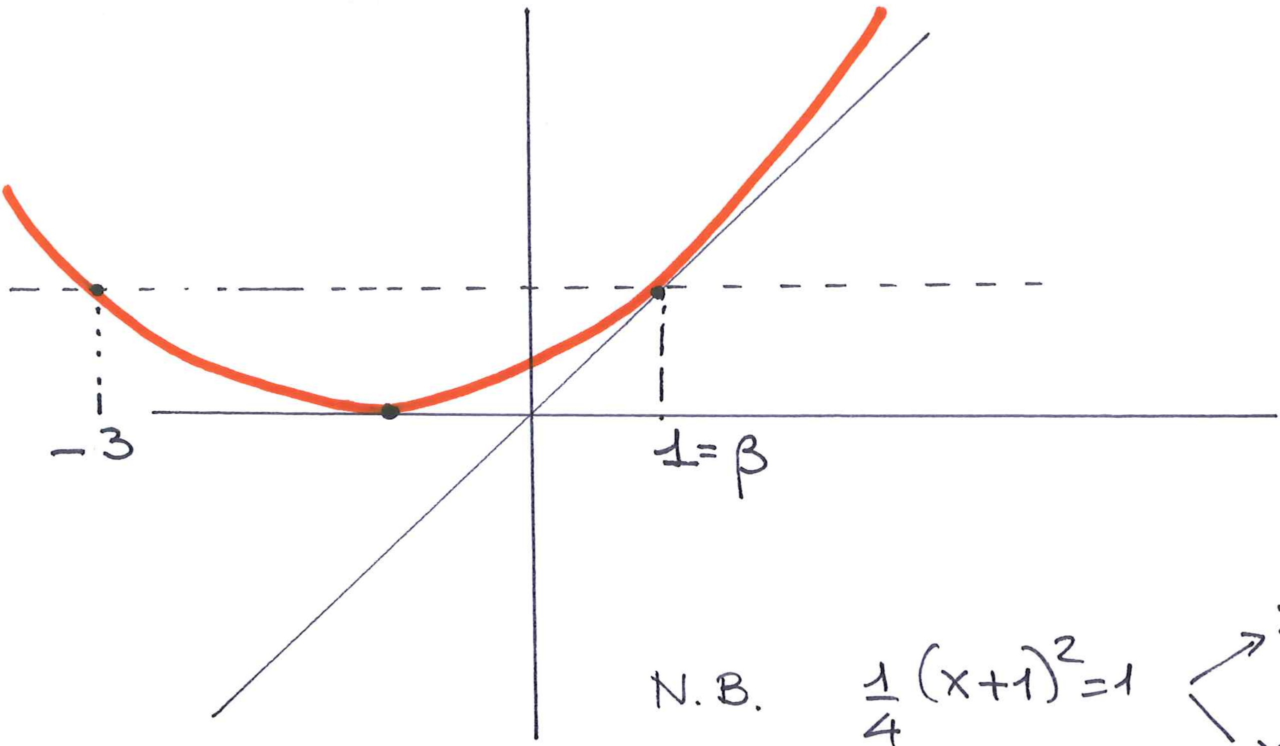
$\beta = 1$ punto fisso molteplicità doppia

$g'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)$ $\quad g'(1) = 1$???

studio grafico

$g \rightarrow$ parabola (tangente al grafico di $y = x$ in $x = 1$)

$V(-1; 0)$



N.B. $\frac{1}{4}(x+1)^2=1$ $\nearrow x=1$ $\searrow x=-3$

1) $x_0<-3$ $\quad x_1>1$ (β)

2) $-3<x_0<0$ $\quad 0<x_1<1 \Rightarrow$

succ. monotona crescente lim. sup. da $\beta: x_n \nearrow \beta$

3) $0<x_0<1$ vedi caso 2)

4) $x_0>\beta$ succ. mon. cresc. ill. sup $\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$

Infatti: $\quad |g'(x)|<1$

$\left|\frac{1}{2}(x+1)\right|<1 \qquad |x+1|<2$

$-3<x<1$

ordine 1 $\quad (-3<x_0<1)$

$\bullet\bullet\bullet \quad g(x) = \frac{1}{8}(x+1)^3 \qquad x_{n+1} = \frac{1}{8}(x_n+1)^3$

$$x = \frac{1}{8}(x^3+3x^2+3x+1)$$

$$8x = x^3+3x^2+3x+1$$

$$x^3+3x^2-5x+1$$

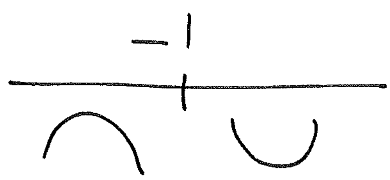
$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 3 & -5 & 1 \\
1 & & 1 & 4 & -1 \\
\hline
 & 1 & 4 & -1 & //
\end{array}$$

$$(x-1)(x^2+4x-1)=0 \qquad \beta = 1$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5} \qquad \alpha = -2-\sqrt{5}$$
$$\gamma = -2+\sqrt{5}$$

$$g'(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2 > 0 \quad \forall x \neq -1$$

$$g''(x) = \frac{3}{4}(x+1)$$



(a $\beta=1$)

$*\ g'(1) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} > 1$ non converge per $x_0 \in I(1)$

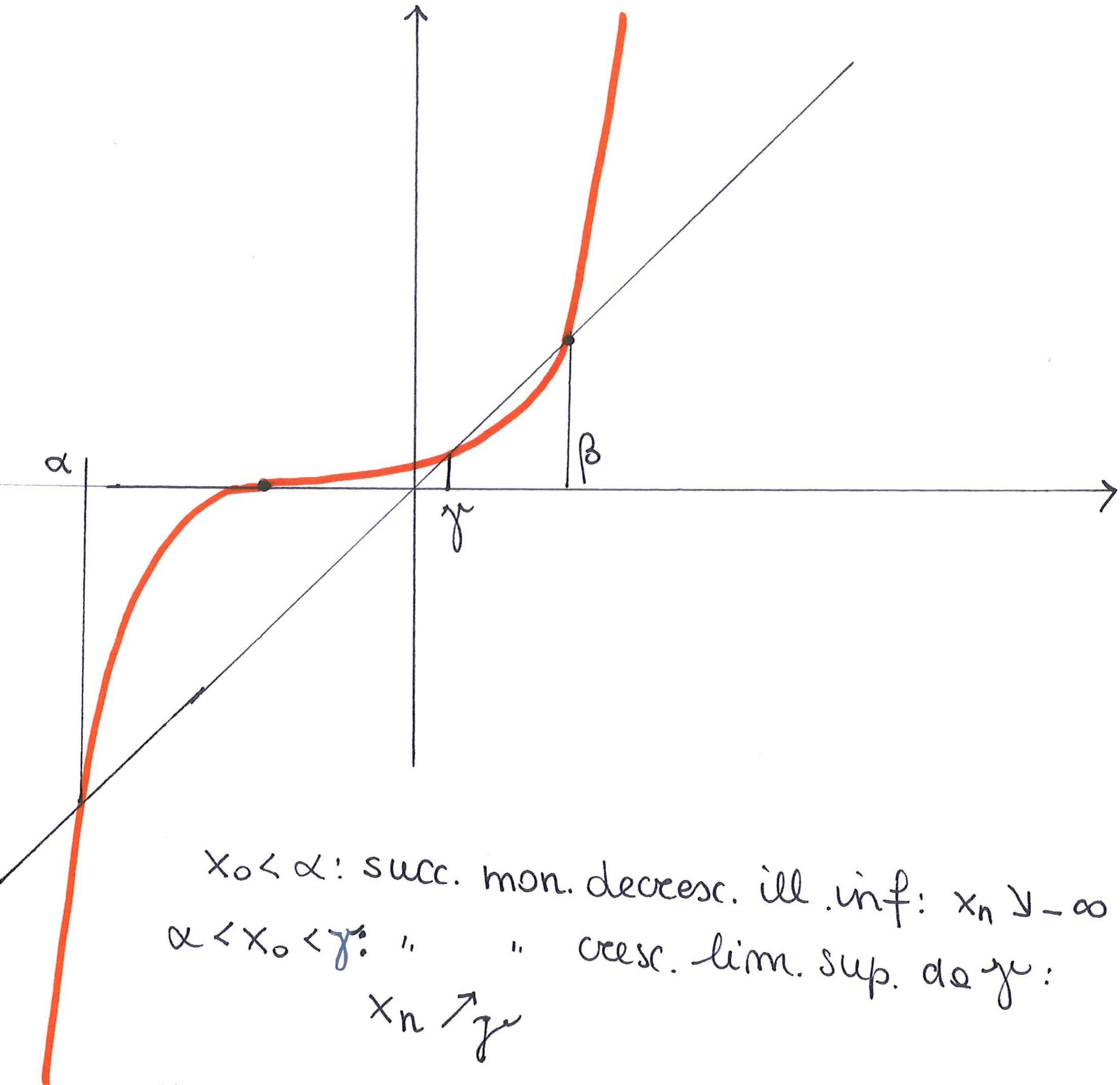
$*\ g'(-2-\sqrt{5}) = \frac{3}{8}(-2-\sqrt{5}+1)^2 = \frac{3}{8}(1+\sqrt{5})^2 =$

$\frac{3}{8}(1+5+2\sqrt{5}) = \frac{3}{8}(6+2\sqrt{5}) = \frac{3}{4}(3+\sqrt{5}) > 1$

non converge (ad α) per $x_0 \in I(\alpha)$

$*\ g'(-2+\sqrt{5}) = \frac{3}{8}(-2+\sqrt{5}+1)^2 = \frac{3}{8}(\sqrt{5}-1)^2 =$ a γ

$\frac{3}{8}(6-2\sqrt{5}) = \frac{3}{8}\cdot 2(3-\sqrt{5}) = \frac{3}{4}(3-\sqrt{5}) < 1$ converge $x_0 \in I(\gamma)$



$x_0 < \alpha$: succ. mon. decresc. ill. inf: $x_n \searrow -\infty$

$\alpha < x_0 < \gamma$: " " cresc. lim. sup. da γ:

$x_n \nearrow \gamma$

$\gamma < x_0 < \beta$: succ. mon. decr. lim. inf. da γ:

$x_n \searrow \gamma$

$x_0 > \beta$: succ. mon. cresc. ill. sup. $x_n \nearrow +\infty$

ordine 1 conv. a γ

$$g'(\gamma) = \frac{3}{4}(3-\sqrt{5}) \simeq 0.57 \neq 0$$

<1

(+) casi particolari "$x_0 = \alpha$" "$x_0 = \gamma$" "$x_0 = \beta$"

4) Si consideri un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 0 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$$

con α parametro reale. Discutere la convergenza dei metodi di Jacobi e di Gauss Seidel. Nel caso di convergenza stabilire la relazione tre le corrispondenti velocità asintotiche.

23/1/14
2^ itin
M1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 0 & \alpha & 3 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Jacobi.

$$\det \begin{pmatrix} 3\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 3\lambda \end{pmatrix} = 3\lambda(9\lambda^2 - \alpha^2) + (-3\lambda) = 0$$

$$3\lambda(9\lambda^2 - \alpha^2 - 1) = 0 \qquad \lambda = 0 \qquad \lambda = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2+1}{9}} = \pm\frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{3}$$

$$\rho(B_J) = \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{3} < 1 \qquad \alpha^2 + 1 < 9 \qquad -2\sqrt{2} < \alpha < 2\sqrt{2}$$

idem

Gauss_Seidel

Matrice tridiagonale $\qquad \rho(B_{GS}) = \frac{\alpha^2+1}{9} = \rho^2(B_J)$

Velocità di convergenza doppia: $R_{GS} = 2R_J$

[Calcolo:

$$\det \begin{pmatrix} 3\lambda & -1 & 0 \\ -\lambda & 3\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha\lambda & 3\lambda \end{pmatrix} = 3\lambda(9\lambda^2 - \alpha^2\lambda) + \lambda(-3\lambda) = 0$$

$$3\lambda^2(9\lambda - \alpha^2 - 1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \qquad \lambda_3 = \frac{\alpha^2+1}{9} \qquad \rho(B_{GS}) = \frac{\alpha^2+1}{9}$$]

5) Si consideri la sequenza di vettori $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 0, 1, ...$, generati da un metodo iterativo per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Indichiamo con $\mathbf{r}^{(k)} = b - A\mathbf{x}^{(k)}$ i residui, e con $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$ l'errore al passo k. Dimostrare che

$$\frac{\|\mathbf{e}^{(k)}\|}{\|\mathbf{e}^{(0)}\|} \leq K(A)\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{r}^{(0)}\|},$$

dove $\|\cdot\|$ è una norma naturale e $K(A)$ il corrispondente numero di condizionamento di A.

M1

23|1|2014

2^ itin

Si veda, per esempio, l'esercizio n° 5 del tema d'esame del 21 febbraio 2013

Porre $x_1 = x^{(k)}$

$x_0 = x^{(0)}$ ......