TEMA A

ESERCIZIO 1

Calcolo dei punti fissi (facile!):

$$\frac{1}{9} - (x + \frac{1}{3})^2 = x, \quad x < 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{3}$$

$$x^{3/2} + \frac{x}{2} = x, \quad x \geq 0 \Rightarrow \gamma = 0, \ \beta = \frac{1}{4}$$

Alcune considerazioni:

- Per $x < 0$ la funzione $g(x)$ è una **parabola** il cui vertice ha ascissa $-\frac{1}{3}$ [[facile!!! calcolando la derivata di $\frac{1}{9} - (x + \frac{1}{3})^2$ e ponendola =0]] e ordinata $\frac{1}{9}$.
- L'ordinata $\frac{1}{9}$ del vertice della parabola è **minore** dell'ordinata del punto fisso appartenente al primo quadrante ($\beta = \frac{1}{4}$). Questo implica che per $-\frac{5}{3} < x_0 < 0$ dopo un numero k finito di passi si ha $0 \leq x_k < \frac{1}{4} \Rightarrow$

  $x_0 < \alpha \Rightarrow x_n \to -\infty$.

  $\alpha < x_0 < \beta \Rightarrow x_n \to \gamma$.

  $x_0 > \beta \Rightarrow x_n \to \infty$.
- Per $x \geq 0$ si ha: $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow g'(0^+) = \frac{1}{2}$

  (ordine di convergenza 1).

Si osservino anche i grafici di $g(x)$ per $x < 0$ e $x \geq 0$ (figure 1 e 2). Per evidenziare i dettagli vengono riportati due grafici separati. Si osservi inoltre che le scale degli assi x e y sono diverse.

Calcolo di $K(x)$ per $x > 0$.

$$K(x) = \frac{3\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} + 1}$$

$\lim_{x \to 0^+} K(x) = 1$
$\lim_{x \to +\infty} K(x) = \frac{3}{2}$

Per poter concludere che $1 < K(x) < \frac{3}{2}$ **bisogna osservare** che la funzione $y = K(x)$ è monotona crescente, oppure che $K(x) = 1$ e $K(x) = \frac{3}{2}$ non hanno soluzioni $x > 0$ e quindi $K(x) \in (1, \frac{3}{2})$, essendo K continua.

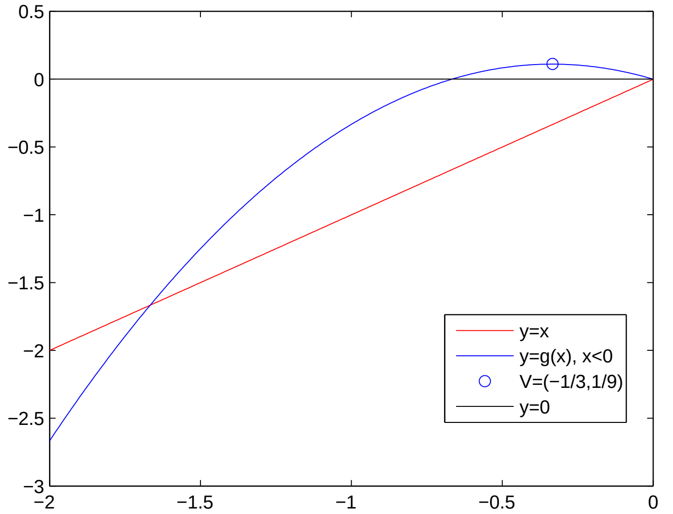

Figure 1: Grafico della funzione $g(x)$ (Tema A) per $x < 0$

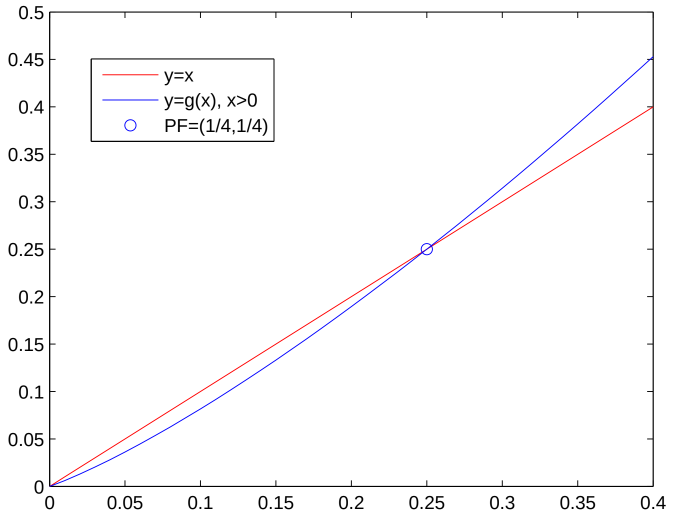

Figure 2: Grafico della funzione $g(x)$ (Tema A) per $x \geq 0$

TEMA A

ESERCIZIO 2

2.1) Per il calcolo di $\|A\|_2$ si può procedere in due modi

1) Applicazione della definizione: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

$$\det(A^T A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1+\alpha^2-\lambda & 0 & 2\alpha \\ 0 & \alpha^2-\lambda & 0 \\ 2\alpha & 0 & 1+\alpha^2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (\alpha^2-\lambda)[(1+\alpha^2-\lambda)^2 - 4\alpha^2] =$$

OSSERVAZIONE!!!

L'espressione all'interno della parentesi quadra $(1+\alpha^2-\lambda)^2 - 4\alpha^2$ è la differenza di due quadrati, dunque si può ricondurla al banale **prodotto notevole** $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$, senza sviluppare il quadrato del trinomio (la maggior parte degli studenti non ha riconosciuto il prodotto notevole e ha poi sbagliato il quadrato del trinomio!!!!!!)

$$= (\alpha^2-\lambda)(1+\alpha^2-\lambda+2\alpha)(1+\alpha^2-\lambda-2\alpha) = 0$$

$\lambda_1 = \alpha^2, \quad \lambda_2 = 1+\alpha^2+2\alpha = (\alpha+1)^2, \quad \lambda_3 = 1+\alpha^2-2\alpha = (\alpha-1)^2$

$\|A\|_2 = \max\{|\alpha|, |\alpha+1|, |\alpha-1|\} = \max\{|\alpha+1|, |\alpha-1|\}$

2) Applicazione dell'uguaglianza $\|A\|_2 = \rho(A)$ che vale essendo A una matrice **simmetrica**.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (\alpha-\lambda)[(1-\lambda)^2 - \alpha^2] =$$

OSSERVAZIONE!!!

L'espressione all'interno della parentesi quadra $(1-\lambda)^2 - \alpha^2$ è la differenza di due quadrati, dunque si può ricondurla al banale **prodotto notevole** $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

$$= (\alpha-\lambda)(1-\lambda+\alpha)(1-\lambda-\alpha) = 0$$

$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = 1+\alpha, \quad \lambda_3 = 1-\alpha$

$\|A\|_2 = \max\{|\alpha|, |\alpha+1|, |\alpha-1|\} = \max\{|\alpha+1|, |\alpha-1|\}$

Si osservi la figura 3.

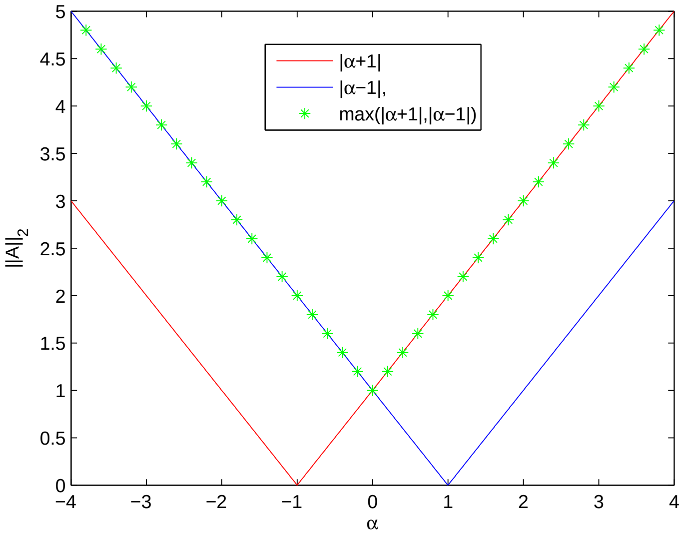

Figure 3: Grafico di $\|A\|_2$ (Tema A)

2.2) Studio della convergenza del metodo di Jacobi.

$$\det(B_J - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\alpha(\lambda^2 - \alpha^2) = \lambda\alpha(\lambda + \alpha)(\lambda - \alpha) = 0$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\alpha, \lambda_3 = +\alpha \Rightarrow \rho(B_J) \equiv \underline{|\alpha| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1,\ \alpha \neq 0}$.

2.3) Studio della convergenza del metodo di Gauss-Seidel.

$$\det(B_{GS} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda\alpha & 0 \\ \lambda\alpha & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda\alpha(\lambda^2 - \alpha^2\lambda) = \lambda^2\alpha(\lambda - \alpha^2) = 0$$

$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = \alpha^2, \Rightarrow \rho(B_{GS}) \equiv \underline{\alpha^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 1,\ \alpha \neq 0}$.

2.4) Si richiede la **fattorizzazione** LU e non lo **splitting** $D + L + U$.
$m_{21} = 0,\ m_{31} = \alpha,\ a_{33} = 1 - \alpha^2$

$$L = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \alpha & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$\|L\|_\infty = \max\{1, 1, 1 + |\alpha|\} = 1 + |\alpha|$
$\|U\|_\infty = \max\{1 + |\alpha|, |\alpha|, |1 - \alpha^2|\} = \max\{1 + |\alpha|, |1 - \alpha^2|\}$

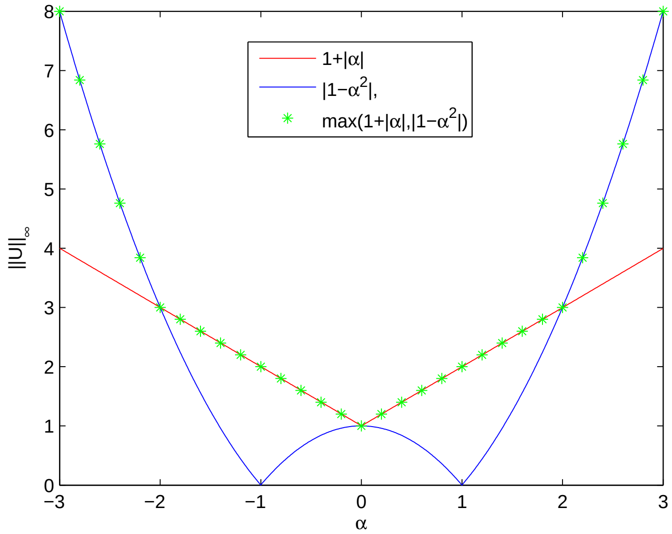

Figure 4: Grafico di $\|U\|_\infty$ (Tema A)

Si osservi la figura 4 e la **simmetria** rispetto a $\alpha = 0$. Inoltre:
$1 + |\alpha| = |1 - \alpha^2|$ per $\alpha = 0$ e $\alpha = \pm 2$.

TEMA B

ESERCIZIO 1

Calcolo dei punti fissi (facile!):

$$\frac{1}{4} - (x + \frac{1}{2})^2 = x, \quad x < 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

$$x^{3/2} + \frac{x}{3} = x, \quad x \geq 0 \Rightarrow \gamma = 0, \ \beta = \frac{4}{9}$$

Alcune considerazioni:

- Per $x < 0$ la funzione $g(x)$ è una **parabola** il cui vertice ha ascissa $-\frac{1}{2}$ [[facile!!! calcolando la derivata di $\frac{1}{4} - (x + \frac{1}{2})^2$ e ponendola =0]] e ordinata $\frac{1}{4}$.
- L'ordinata $\frac{1}{4}$ del vertice della parabola è **minore** dell'ordinata del punto fisso appartenente al primo quadrante ($\beta = \frac{4}{9}$). Questo implica che per $-2 < x_0 < 0$ dopo un numero k finito di passi si ha $0 \leq x_k < \frac{4}{9} \Rightarrow$

  $x_0 < \alpha \Rightarrow x_n \to -\infty$.

  $\alpha < x_0 < \beta \Rightarrow x_n \to \gamma$.

  $x_0 > \beta \Rightarrow x_n \to \infty$.
- Per $x \geq 0$ si ha: $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{3} \Rightarrow g'(0^+) = \frac{1}{3}$

  (ordine di convergenza 1).

Si osservino anche i grafici di $g(x)$ per $x < 0$ e $x \geq 0$ (figure 5 e 6). Per evidenziare i dettagli vengono riportati due grafici separati. Si osservi inoltre che le scale degli assi x e y sono diverse.

Calcolo di $K(x)$ per $x > 0$.

$$K(x) = \frac{9\sqrt{x} + 2}{6\sqrt{x} + 2}$$

$\lim_{x \to 0^+} K(x) = 1$
$\lim_{x \to +\infty} K(x) = \frac{3}{2}$

Per poter concludere che $1 < K(x) < \frac{3}{2}$ **bisogna osservare** che la funzione $y = K(x)$ è monotona crescente, oppure che $K(x) = 1$ e $K(x) = \frac{3}{2}$ non hanno soluzioni $x > 0$ e quindi $K(x) \in (1, \frac{3}{2})$, essendo K continua.

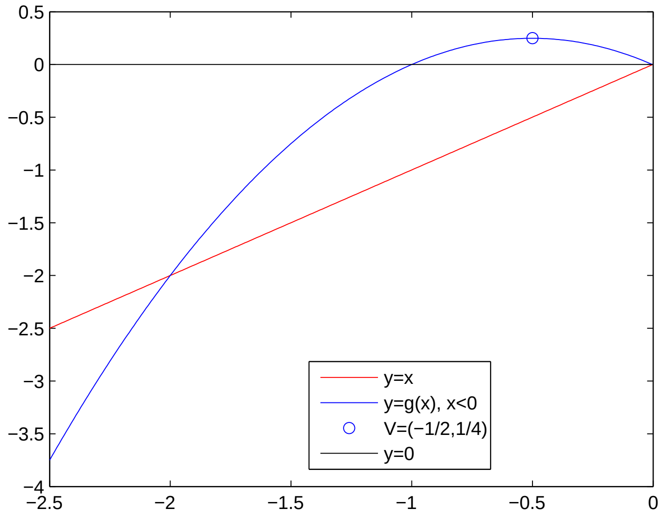

Figure 5: Grafico della funzione $g(x)$ (Tema B) per $x < 0$

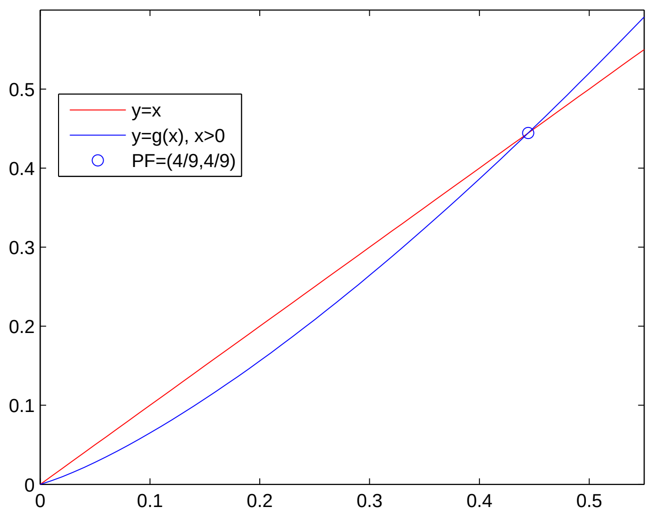

Figure 6: Grafico della funzione $g(x)$ (Tema B) per $x \geq 0$

TEMA B

ESERCIZIO 2

2.1) Per il calcolo di $\|A\|_2$ si può procedere in due modi

1) Applicazione della definizione: $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$

$$\det(A^T A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1+\beta^2-\lambda & 0 & 2\beta \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2\beta & 0 & 1+\beta^2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)[(1+\beta^2-\lambda)^2 - 4\beta^2] =$$

OSSERVAZIONE!!!

L'espressione all'interno della parentesi quadra $(1+\beta^2-\lambda)^2 - 4\beta^2$ è la differenza di due quadrati, dunque si può ricondurla al banale **prodotto notevole** $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$, senza sviluppare il quadrato del trinomio (la maggior parte degli studenti non ha riconosciuto il prodotto notevole e ha poi sbagliato il quadrato del trinomio!!!!!!)

$$= (1-\lambda)(1+\beta^2-\lambda+2\beta)(1+\beta^2-\lambda-2\beta) = 0$$

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1+\beta^2+2\beta = (\beta+1)^2, \quad \lambda_3 = 1+\beta^2-2\beta = (\beta-1)^2$

$\|A\|_2 = \max\{1, |\beta+1|, |\beta-1|\} = \max\{|\beta+1|, |\beta-1|\}$

2) Applicazione dell'uguaglianza $\|A\|_2 = \rho(A)$ che vale essendo A una matrice **simmetrica**.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \beta-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & \beta-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)[(\beta-\lambda)^2 - 1] =$$

OSSERVAZIONE!!!

L'espressione all'interno della parentesi quadra $(\beta-\lambda)^2 - 1$ è la differenza di due quadrati, dunque si può ricondurla al banale **prodotto notevole** $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

$$= (1-\lambda)(\beta-\lambda+1)(\beta-\lambda-1) = 0$$

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \beta+1, \quad \lambda_3 = \beta-1$

$\|A\|_2 = \max\{1, |\beta+1|, |\beta-1|\} = \max\{|\beta+1|, |\beta-1|\}$

Si osservi la figura 3, con β al posto di α.

2.2) Studio della convergenza del metodo di Jacobi.

$$\det(B_J - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \lambda\beta & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & \lambda\beta \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2\beta^2 - 1) = \lambda(\lambda\beta + 1)(\lambda\beta - 1) = 0$$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{1}{\beta}, \lambda_3 = +\frac{1}{\beta} \Rightarrow \rho(B_J) \equiv \underline{\frac{1}{|\beta|} < 1 \Leftrightarrow, |\beta| > 1 \Leftrightarrow \beta < -1 \ \vee \beta > 1}.$

2.3) Studio della convergenza del metodo di Gauss-Seidel.

$$\det(B_{GS} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \lambda\beta & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda\beta \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2\beta^2 - \lambda) = \lambda^2(\lambda\beta^2 - 1) = 0$$

$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = \frac{1}{\beta^2} \Rightarrow \rho(B_J) \equiv \underline{\frac{1}{\beta^2} < 1 \Leftrightarrow, \beta^2 > 1 \Leftrightarrow \beta < -1 \ \vee \beta > 1}.$

2.4) Si richiede la **fattorizzazione** LU e non lo **splitting** $D + L + U$.
$m_{21} = 0,\ m_{31} = \frac{1}{\beta},\ a_{33} = \beta - \frac{1}{\beta}$

$$L = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ \frac{1}{\beta} & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta - \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

$\|L\|_\infty = \max\{1, 1, 1 + \frac{1}{|\beta|}\} = 1 + \frac{1}{|\beta|}$

$\|U\|_\infty = \max\{1 + |\beta|, 1, |\beta - \frac{1}{\beta}|\} = \max\{1 + |\beta|, |\beta - \frac{1}{\beta}|\}$

Alcune osservazioni sul calcolo di $\max\{1 + |\beta|, |\beta - \frac{1}{\beta}|\}$ al variare di β:
si può procedere risolvendo quattro disequazioni (osservando la simmetria si può ridurre il confronto a due disequazioni...) al variare dei segni delle quantità all'interno dei moduli, dunque considerando β che varia in 4 possibili intervalli: $(-\infty, -1],\ (-1, 0),\ (0, 1],\ (1, +\infty) \Longrightarrow$ Procedimento lungo, qualcuno è riuscito a portarlo a termine correttamente. Brava/o!
In alternativa si può procedere al confronto grafico partendo dallo studio della funzione $y = \beta - \frac{1}{\beta}$.

- C.E. $\beta \neq 0$.
- Simmetria rispetto all'origine.
- Asintoto verticale: $\beta = 0$.
- Asintoto obliquo: $y = \beta$.
- Intersezioni con l'asse delle ascisse: $\beta = \pm 1$.

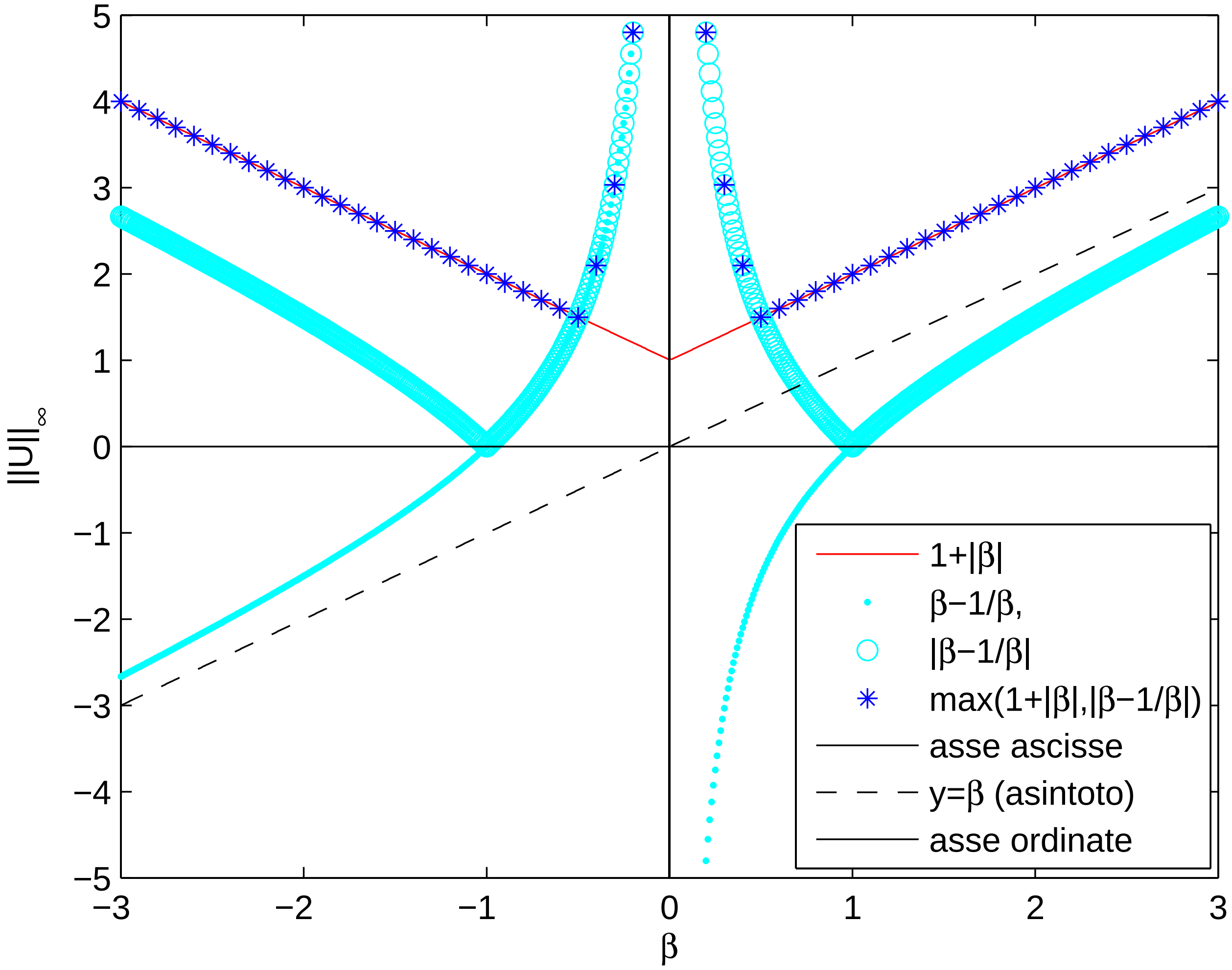

Figure 7: Grafico di $\|U\|_\infty$ (Tema B)

- $y' = 1 + \frac{1}{\beta}$, $\beta \neq 0 \Longrightarrow$ funzione crescente per $\beta < 0$ e $\beta > 0$.

Dopo aver tracciato il grafico di $y = \beta - \frac{1}{\beta}$ si considera il grafico di $|y|$. Si osserva quindi che esistono due punti (simmetrici rispetto all'asse delle y) di intersezione con la curva $y = 1 + |\beta|$.
Per calcolarli:
$\beta > 0 : 1 + \beta = -\beta + \frac{1}{\beta} \Longrightarrow \beta = \frac{1}{2}$ e $\beta = -1$ (non accettabile).
Per simmetria si ottiene $\beta = -\frac{1}{2}$.
In sintesi, si osservi la figura 7.