ESERCIZIO 2

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)};\ \ A^T A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ -x & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -x \\ x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+4 & 0 \\ 0 & x^2+4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1(A^T A) = \lambda_2(A^T A) = x^2 + 4 \longrightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{x^2+4}$$

$$K(f(x)) = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \frac{\left|x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right|}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2}{x^2+4} < 1,$$

dunque il problema è sempre ben condizionato.

ESERCIZIO 3

$$g(x) = \begin{cases} 1-(x-1)^2 \\ \frac{1}{e}\ e^x - (x-1) \end{cases} \quad g'(x) = \begin{cases} -2(x-1) \\ \frac{1}{e}\ e^x - 1 \end{cases} \quad g''(x) = \begin{cases} -2 & x < 1 \\ \frac{1}{e}\ e^x & x \geq 1 \end{cases}$$

$g(1^-) = g(1^+) = 1, \quad g'(1^-) = g'(1^+) = 0 \Longrightarrow g \in C^1(\mathbb{R})$.

In particolare si deduce anche che $\boxed{\beta = 1}$ è un punto fisso.

Ricerca degli altri punti fissi:

$g(x) = x,\ x < 1 : 1 - (x-1)^2 = x$, che ammette come soluzione $x = 0$.
Dunque $\boxed{\alpha = 0}$ è un punto fisso.

$g(x) = x,\ x \geq 1 : \frac{1}{e}\ e^x - 1 = x$
Si osservi che $g(2) = e - 1 < 2$, $g(3) = e^2 - 2 > 3$.
Dunque $\boxed{\gamma \in (2,3)}$ è un punto fisso.

Studio della convergenza al variare di x_0:

$x_0 < \alpha \longrightarrow$: successione monotona decrescente illimitata inferiormente:
$x_n \searrow -\infty$;

$\alpha < x_0 < \beta \longrightarrow$: successione monotona crescente limitata superiormente da β:
$x_n \nearrow \beta$;

$\beta < x_0 < \gamma \longrightarrow$: successione monotona decrescente limitata inferiormente da β:
$x_n \searrow \beta$;

$x_0 > \gamma \longrightarrow$: successione monotona crescente illimitata superiormente:
$x_n \nearrow +\infty$;

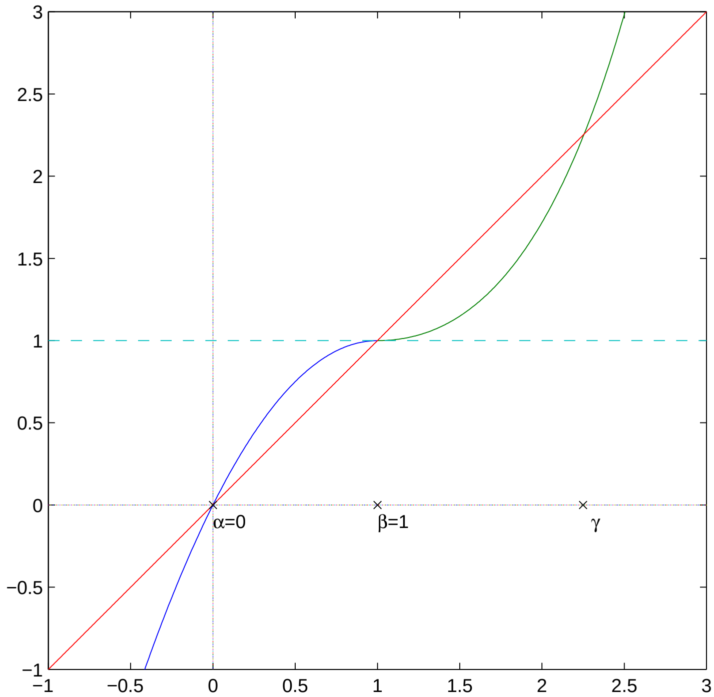

Figure 1: Grafico della funzione g.

Studio dell'ordine:
$g'(1) = 0$, $g''(1^-) = -2$; $g''(1^+) = 1 \Longrightarrow$ ordine 2.

ESERCIZIO 4

4.1) Convergenza del metodo di Jacobi:

$$\det \begin{pmatrix} a\lambda & 0 & 1 \\ 0 & a\lambda & 1 \\ 1 & 1 & a\lambda \end{pmatrix} = 0, \quad a\lambda(a^2\lambda^2 - 1) - a\lambda = a\lambda(a^2\lambda^2 - 2) = 0,$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{a}$, $\rho(B_J) = \dfrac{\sqrt{2}}{|a|} < 1 \Leftrightarrow |a| > \sqrt{2}$.

4.2) Matrici N e P : $N = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{a}{2} & -1 \\ -1 & -1 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$;

Matrice di iterazione $B = N^{-1}P$:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{a}{2} & -1 \\ -1 & -1 & -\frac{a}{2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{a} \\ \\ 0 & 1 & \frac{2}{a} \\ \\ \frac{2}{a} & \frac{2}{a} & 1 \end{pmatrix};$$

Essendo $\rho(B) = \rho(-B)$ si consideri l'equazione caratteristica $\det(-B - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & \frac{2}{a} \\ \\ 0 & 1-\lambda & \frac{2}{a} \\ \\ \frac{2}{a} & \frac{2}{a} & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \left[(1-\lambda)^2 - \frac{4}{a^2} \right] - \frac{2}{a} \frac{2}{a} (1-\lambda) =$$

$$(1-\lambda) \left[(1-\lambda)^2 - \frac{8}{a^2} \right] = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = ...$$

da cui si deduce che $\rho(B) \geq 1$, indipendentemente dai valori di $\lambda_2\ \lambda_3$, e quindi il metodo iterativo non converge.

4.3) Stima del numero di iterazioni.

$$a = 4, \quad \rho(B) = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad k \geq \frac{-\ln \varepsilon}{-\ln \rho(B)},\ \varepsilon = 10^{-4},\ \frac{-\ln 10^{-4}}{-\ln \frac{\sqrt{2}}{4}} \approx 8.858 \Rightarrow \overline{k} = 9.$$