CALCOLO NUMERICO 1 (2 dicembre 2010)

CORREZIONE della Prima prova in itinere

1) Tenendo conto che $x \in (2, \infty)$, si ha:

$$K(f(x)) = \Big|\frac{xf'(x)}{f(x)}\Big| = \Big|\frac{\frac{1}{4}x\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}}}{\frac{1}{2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}\Big| = \frac{1}{2}x\frac{1}{\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}};$$

$$\frac{1}{2}x\frac{1}{\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}} < 5, \;\Rightarrow 99x^2 > 400, \;\Rightarrow x > \frac{20}{3\sqrt{11}} \approx 2.01007$$

2) $(x_0, y_0) = (0, 2)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$, $(x_2, y_2) = (2, 0)$, $(x_3, y_3) = (-1, 0)$.

2.1) Con il metodo delle differenze divise si ottiene:

$$a_0 = 2, \; a_1 = 0, \; a_2 = -1, \; p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) = -x^2 + x + 2,$$

e successivamente: $a_3 = 0, \; q(x) = p(x)$.

2.2) Per la maggiorazione dell'errore:

$$\forall x \in [0, 2]: \quad |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{3!}|x(x-1)(x-2)| \max_{t\in[0,2]} |f^{(3)}(t)|.$$

In particolare, per $x \in [0, 2]$:
A) $|\omega(x)| = |x(x-1)(x-2)| \leq 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$.
In modo più rigoroso, calcolando il massimo di $|\omega|$ sull'intervallo $[0, 2]$:
B) $\omega'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$, per $x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, e $x \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, da cui

$$|\omega(x)| \leq \left|\omega\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \; x \in [0, 2].$$

Inoltre : $\quad f^{(3)}(t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \left[\sin\frac{\pi}{2}t - \cos\frac{\pi}{2}t\right] = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$\max_{t\in[0,2]} |f^{(3)}(t)| = \frac{\pi^3}{8}\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\pi^3}{4\sqrt{2}}.$$

Concludendo si ha:

$$A) \max_{x\in[0,2]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{6}\, 4\frac{\pi^3}{4\sqrt{2}} \approx 3.654.$$

$$B) \max_{x\in[0,2]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{6}\frac{2\sqrt{3}}{9}\frac{\pi^3}{4\sqrt{2}} \approx 0.3516.$$

In modo meno preciso si può sfruttare la disuguaglianza triangolare:

$$\left|\sin\frac{\pi}{2}t - \cos\frac{\pi}{2}t\right| \leq 2,$$

da cui si ottiene:

$A)\ \max_{x\in[0,2]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{6}\, 4\frac{\pi^3}{8}\, 2 \approx 5.1677.$

$B)\ \max_{x\in[0,2]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{6}\,\frac{2\sqrt{3}}{9}\,\frac{\pi^3}{8}\, 2 \approx 0.4973.$

2.3) Calcolo dei coefficienti della matrice dei minimi quadrati discreti:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 2,\ \sum_{i=1}^{4} y_i = 4,\ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 6,\ \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_0 = 1,\ a_1 = 0 \Rightarrow p^* = 1.$$

3) Calcolo delle derivate successive di f:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 - 3x^2 & x < 0 \\ x^3 - 3x^2 & x \geq 0 \end{cases};\ f'(x) = \begin{cases} -3x^2 - 6x & x < 0 \\ 3x^2 - 6x & x \geq 0 \end{cases};\ f''(x) = \begin{cases} -6x - 6 & x < 0 \\ 6x - 6 & x \geq 0 \end{cases},$$

dunque $f \in C^2[-1, 2]$ e

$$\max_{-1\leq t\leq 2} |f^{(2)}(t)| = 6.$$

Stima classica dell'errore:

$$I(f) - I_T^C(f) = -\frac{b-a}{12} H^2 f^{(2)}(t),$$

con $a = -1$, $b = 2$, $H = \frac{3}{M}$. Si ha dunque:

$$|I(f) - I_T^C(f)| \leq \frac{3}{12}\left(\frac{3}{M}\right)^2 6 = \frac{27}{2M^2} \leq 10^{-3} \Rightarrow M \geq \sqrt{13500} \approx 116.18 \Rightarrow \overline{M} = 117.$$

Stima asintotica dell'errore:

$$I(f) - I_T^C(f) = \frac{H^2}{12}[f^{(1)}(-1) - f^{(1)}(2)].$$

Si ha dunque:

$$|I(f) - I_T^C(f)| \leq \frac{H^2}{12} 3 = \left(\frac{3}{M}\right)^2 \frac{1}{4} \leq 10^{-3} \Rightarrow M \geq \sqrt{2250} \approx 47.43 \Rightarrow \overline{M} = 48.$$