CALCOLO NUMERICO 1 (3 febbraio 2011)

<u>CORREZIONE</u> della Seconda prova in itinere

1.1) Si osservi che, essendo la matrice simmetrica, si ha:

$$K_2(A) = \|A\|_2 \; \|A^{-1}\|_2 = \frac{\max_{1\le i\le n} |\lambda_i(A)|}{\min_{1\le i\le n} |\lambda_i(A)|},$$

gli autovalori di A sono reali e i cerchi di Gershgorin sono intervalli di $\mathbb{R}$.
Applicando il primo teorema di Gershgorin:

$|\lambda - n| \le \frac{1}{n} + (n-2)$
$|\lambda - n| \le (n-1)$ (questa condizione è la meno restrittiva fra le due)
$\Rightarrow 1 \le \lambda \le 2n-1$

$\max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i(A)| = \max\limits_{1\le i\le n} \lambda_i(A) \le 2n{+}1$; $\min\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i(A)| = \min\limits_{1\le i\le n} \lambda_i(A) \ge 1$.

Si conclude : $K_2(A) = \dfrac{\max_{1\le i\le n} \lambda_i(A)}{\min_{1\le i\le n} \lambda_i(A)} \le 2n{-}1.$

1.2) Si osservi che la matrice A è diagonalmente dominante, dunque i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono entrambi. Infatti:
$n > (n-2) + \frac{1}{n}$ da cui $2 > \frac{1}{n}$, che è vero essendo $n \ge 3$; $n > (n-1)$.

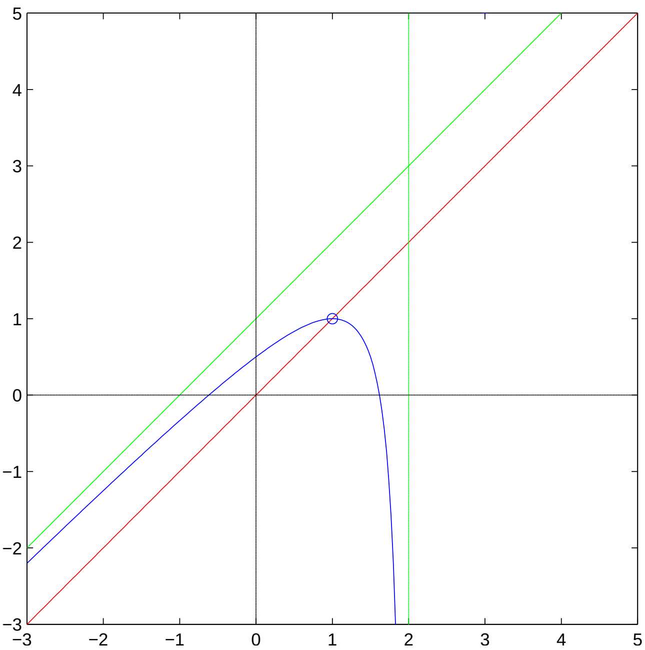
1.3) $\|A\|_\infty = \max\left\{ n + (n-2) + \dfrac{1}{n};\; n + (n-1) \right\} = 2n{-}1.$

1.4)$N_{ij} = \begin{cases} n + \frac{1}{n} & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } i = j, \\ -\frac{1}{n} & \text{se } i = 1 \wedge j = n \text{ oppure } j = 1 \wedge i = n, \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$B_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n^2+1} & \text{se } i = j, \\ -\frac{1}{n^2+1} & \text{se } i = 1 \wedge j = n \text{ oppure } j = 1 \wedge i = n, . \\ -\frac{n}{n+1} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\|B\|_\infty = \max\left\{ \dfrac{1}{n^2+1} + (n-2)\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+1};\; \dfrac{1}{n^2+1} + (n-1)\dfrac{n}{n^2+1} \right\} =$

$\max\left\{ \dfrac{1+n^2-2n+1}{n^2+1};\; \dfrac{1+n^2-n}{n^2+1} \right\} = \dfrac{n^2-n+1}{n^2+1} < 1,\ \forall n,$ c.v.d.



2.1) $f(0) = 1 > 0,\ f(1.5) = -0.5e^{1.5} < 0;\ f'(x) = (x-2)e^{-x} < 0,\ \forall x \in [0, 1.5]$, dunque $\exists! \alpha \in [0, 1.5]$ tale che $f(\alpha) = 0$.

$$\text{Metodo di bisezione : } |x_k - \alpha| \le \frac{1.5}{2^k} < 10^{-2}, \text{se } k \ge 8.$$

$$2.2) x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{(1-x_k)e^{-x_k}}{(x_k-2)e^{-x_k}} = x_k + \frac{(x_k-1)}{(x_k-2)} = \frac{x_k^2 - x_k - 1}{x_k - 2}.$$

Studio di $y = g(x) \equiv \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ $(\alpha = 1)$

C.E. $x \neq 2$, asintoto verticale $x = 2$, asintoto obliquo $y = x + 1$;
$g(x) > 0$ se $x < \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\ \cup x > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$
$g'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} \ge 0$, se $x \le 1\ \vee x \ge 3$; Massimo: $(1, 1)$; Minimo: $(3, 5)$.

Studio della convergenza al variare di $x_0 < 2$:
$\alpha < x_0 < 2 \longrightarrow x_1 < \alpha$;
$x_0 < \alpha \longrightarrow x_n \nearrow \alpha$ (succ. monotona cresc. lim. sup. da α)

$g'(1) = 0$ (ovvio per il metodo di Newton, $\alpha = 1$ ha molteplicità 1)

$$g'(x) = \frac{(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2} = 1 - \frac{1}{(x-2)^2},\ g''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0,\ \forall x \neq 2; \Rightarrow 2^o \text{ ordine}$$