CALCOLO NUMERICO 1 (10 febbraio 2011)

CORREZIONE

ESERCIZIO 1

1.1) $m_{21} = a$; $m_{31} = m_{41} = 0$; $a_{22} = 1 + a^2$; $m_{32} = m_{42} = 0$;
$m_{43} = a; a_{44} = 1 + a^2$.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1+a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}.$$

1.2) $\det A_1 = 1$; $\det A_2 = \det A_3 = 1 + a^2$; $\det A = \det L \cdot \det U = (1 + a^2)^2$.

1.3) $\det \begin{pmatrix} \lambda & -a & 0 & 0 \\ a & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -a \\ 0 & 0 & a & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 + a^2)^2 = 0,\ \lambda = \pm ia,\ \rho(B_J) = |a|.$

$\det \begin{pmatrix} \lambda & -a & 0 & 0 \\ \lambda a & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -a \\ 0 & 0 & \lambda a & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(\lambda + a^2)^2 = 0,\ \lambda = 0,\ \lambda = -a^2,\ \rho(B_{GS}) = a^2.$

$\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2 < 1 \iff -1 < a < 1.$

$R(B_{GS}) = -\ln \rho(B_{GS}) = -\ln \rho(B_J)^2 = 2R(B_J)$; (la matrice A è tridiagonale).

ESERCIZIO 2

$$K(f(t)) = \Big|\frac{tf'(t)}{f(t)}\Big| = \Big|\frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\ \frac{1+t^2}{2t}\Big| = \Big|\frac{1-t^2}{1+t^2}\Big| < 1,\ \forall t \neq 0.$$

ESERCIZIO 3

3.1) Con il metodo delle differenze divise si ottiene:

$a_0 = 1,\ a_1 = -\dfrac{1}{2},\ a_2 = \dfrac{1}{6},\ p(x) = a_0 + a_1(x+1) + a_2 x(x+1) = \dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2},$.

3.2) Per la maggiorazione dell'errore:

$$\forall x \in [-1, 1]: \ |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{3!}|\omega(x)| \max_{t \in [-1,1]} |f^{(3)}(t)| = \frac{1}{3!}|x(x+1)(x-1)| \max_{t \in [-1,1]} |f^{(3)}(t)|.$$

In particolare, per $x \in [-1,1]$:

A) $|\omega(x)| = |(x+1)|\ |x|\ |(x-1)| \leq 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$.

In modo più rigoroso, calcolando il massimo di $|\omega(x) = x^3 - x|$, per $x \in [-1,1]$:

B) $\omega'(x) = 3x^2 - 1 \geq 0$, per $x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$, e $x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, da cui

$|\omega(x)| \leq \left|\omega\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $\forall x \in [-1,1]$.

Inoltre : $\max\limits_{t\in[-1,1]} |f^{(3)}(t)| = \max\limits_{t\in[-1,1]} \left|\frac{-6}{(t+2)^4}\right| = 6$

Concludendo si ha:

$A)\ \max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 6 = 4.$

$B)\ \max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{6}\frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 6 = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$

3.3) $\frac{h^2}{8} \max\limits_{t\in[-1,1]} |f''(t)| = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{n}\right)^2 \underbrace{\max\limits_{t\in[-1,1]} \left|\frac{2}{(t+2)^3}\right|}_{=2} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{100} \Rightarrow \overline{n} = 11.$

ESERCIZIO 4

- Grado di precisione $r = 0$, $f(x) = 1$, $f'(x) = 0$:

$$\int_a^b \mathrm{d}x = b - a;\quad \tilde{I}(1) = f(x_0)(b-a) = b - a\ \Rightarrow I(1) = \tilde{I}(1).$$

- Grado di precisione $r = 1$, $f(x) = x$, $f'(x) = 1$:

$$\int_a^b x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2 - a^2);$$

$\tilde{I}(x) = x_0(b-a) + \frac{1}{2}[(b-x_0)^2 - (a-x_0)^2] = x_0(b-a) + \frac{1}{2}(b - \cancel{x_0} - a + \cancel{x_0})(b - x_0 + a - x_0) =$

$x_0(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)(b+a-2x_0) = (b-a)(\cancel{x_0} + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - \cancel{x_0}) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \Rightarrow I(x) = \tilde{I}(x).$