2) Studiare esistenza e unicità, al variare di α nell'intervallo indicato, della soluzione del seguente problema di interpolazione: *determinare il polinomio di secondo grado $p_2(x)$ tale che*

$$p_2(a) = u_a;\ p_2(b) = u_b,\ b > a;\ p_2'(x_\alpha) = u_\alpha,\quad x_\alpha = a + \alpha,\ \alpha \in [0, b-a],$$

per ogni insieme di dati u_a, u_b, u_α. Scegliere un opportuno valore di α per cui esista e sia unico il polinomio interpolante, e costruire la formula di quadratura corrispondente. Che grado di precisione ha la formula costruita? E' una formula di tipo Gaussiano?

MI

2|2|12

$$p_2(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$p_2'(x) = 2Ax + B$$

$$\begin{cases} Aa^2 + Ba + C = u_a \\ Ab^2 + Bb + C = u_b \\ 2A(a+\alpha) + B = u_\alpha \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ 2(a+\alpha) & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_\alpha \end{bmatrix}$$

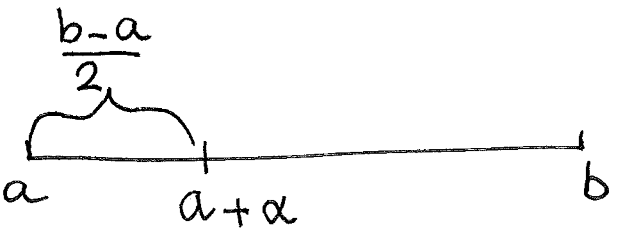
$\det M \neq 0$

$$\begin{vmatrix} b^2 & b \\ 2(a+\alpha) & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2 & a \\ 2(a+\alpha) & 1 \end{vmatrix} = b^2 - 2b(a+\alpha) - a^2 + 2a(a+\alpha) \neq 0$$

$$(b+a)(b-a) - 2(b-a)(a+\alpha) \neq 0$$

$$(b-a)\left[b+a-2(a+\alpha)\right] \neq 0 \qquad a \neq b$$

$$a+\alpha \neq \frac{b+a}{2} \qquad \alpha \neq \frac{b-a}{2}$$



Scelta $\alpha = 0$ $\quad x_\alpha = a$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \omega_1 f(a) + \omega_2 f(b) + \omega_3 f'(a)$$

• $r=0 \quad f=1 \quad f'=0$

$$\int_a^b 1\,dx = b-a$$

$$\boxed{\omega_1 + \omega_2 = b-a}$$

• $r=1 \quad f=x \quad f'=1$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b+a)(b-a)}{2}$$

$$\boxed{\omega_1 \cdot a + \omega_2 \cdot b + \omega_3 = \frac{(b+a)(b-a)}{2}}$$

• $r=2 \quad f=x^2 \quad f'=2x$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} = \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3}$$

$$\boxed{\omega_1 \cdot a^2 + \omega_2 \cdot b^2 + 2\omega_3 a = \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3}}$$

Dalla 1^ : $\omega_1 = b-a-\omega_2$

$$\begin{cases} (b-a-\omega_2)\cdot a + \omega_2 b + \omega_3 = \dfrac{(b+a)(b-a)}{2} \\ (b-a-\omega_2)a^2 + \omega_2 b^2 + 2\omega_3 a = \dfrac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(b-a) + \omega_2(b-a) + \omega_3 = \dfrac{(b+a)(b-a)}{2} \\ \text{idem} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_3 = \dfrac{(b+a)(b-a)}{2} - (b-a)\,a - w_2(b-a) \\ \text{idem} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_3 = (b-a)\left[\dfrac{b}{2}+\dfrac{a}{2} - a - w_2\right] = (b-a)\left(\dfrac{b}{2}-\dfrac{a}{2}-w_2\right) \\ \text{idem} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_3 = (b-a)\left(\dfrac{b-a-2w_2}{2}\right) \\ (b-a-w_2)\,a^2 + w_2 b^2 + \cancel{2}a(b-a)\,\dfrac{b-a-2w_2}{\cancel{2}} = \\ \qquad = \dfrac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_3 = \dots \\ ba^2 - a^3 - w_2 a^2 + w_2 b^2 + a(b-a)^2 - 2a(b-a)\,w_2 = \dots\dots \end{cases}$$

$$w_2\left[-a^2 + b^2 - 2ab + 2a^2\right] = \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3} - ba^2 + a^3 - a(b-a)^2 +$$

$$w_2(a-b)^2 = (b-a)\,\frac{a^2+ab+b^2}{3} - a^2(b-a) - a(b-a)^2$$

$$= (b-a)\left[\frac{a^2+ab+b^2}{3} - \cancel{a^2} - ab + \cancel{a^2}\right]$$

$$w_2 = \frac{(b-a)}{(a-b)^2}\left[\frac{a^2+ab+b^2-3ab}{3}\right] =$$

$$w_2 = \frac{b-a}{\cancel{(a-b)^2}} \cdot \frac{\cancel{(a-b)^2}}{3} = \frac{b-a}{3}$$

$$w_3 = (b-a)\left(\frac{b-a-2\frac{(b-a)}{3}}{2}\right) =$$

$$= (b-a)(b-a)\frac{1}{6} = \frac{1}{6}(b-a)^2$$

$$w_1 = b-a-\frac{b-a}{3} = \frac{2}{3}(b-a)$$

$$F.Q. = \frac{2}{3}(b-a)\,f(a) + \frac{1}{3}(b-a)\,f(b) + \frac{1}{6}(b-a)^2 f'(a)$$

In alternativa:
utilizzare la sostituzione

$$t = x-a \qquad \begin{array}{ll} x=a & t=0 \\ x=b & t=b-a \\ dx=dt & \end{array}$$