2) Data la funzione $g(u) \equiv 1 + u - \frac{1}{8}u^3$: MILANO 20 FEBBRAIO 2014

2.1) g ha punti fissi?

2.2) Trovare un intorno I per ogni eventuale punto fisso in modo tale che la successione $u_{k+1} = g(u_k)$, $k \geq 0$, con $u_0 \in I$ assegnato, converga al punto fisso considerato.

2.3) Con che ordine converge eventualmente il metodo iterativo al punto 2.2)?

2.4) Nel caso di convergenza a un punto fisso α, stimare il numero di iterazioni per ottenere un errore $|\alpha - u_k| < 10^{-4}$.

$$g(u) = 1 + u - \frac{1}{8}u^3$$

2.1) $1 + u - \frac{1}{8}u^3 = u$ $\qquad u^3 - 8 = 0 \quad u = 2 \qquad A(2;2)$

2.2)
Studio di g: $\lim_{u \to \pm\infty} g(u) = \mp\infty$

$$g'(u) = 1 - \frac{3}{8}u^2 > 0 \qquad u^2 < \frac{8}{3} \qquad -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < u < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

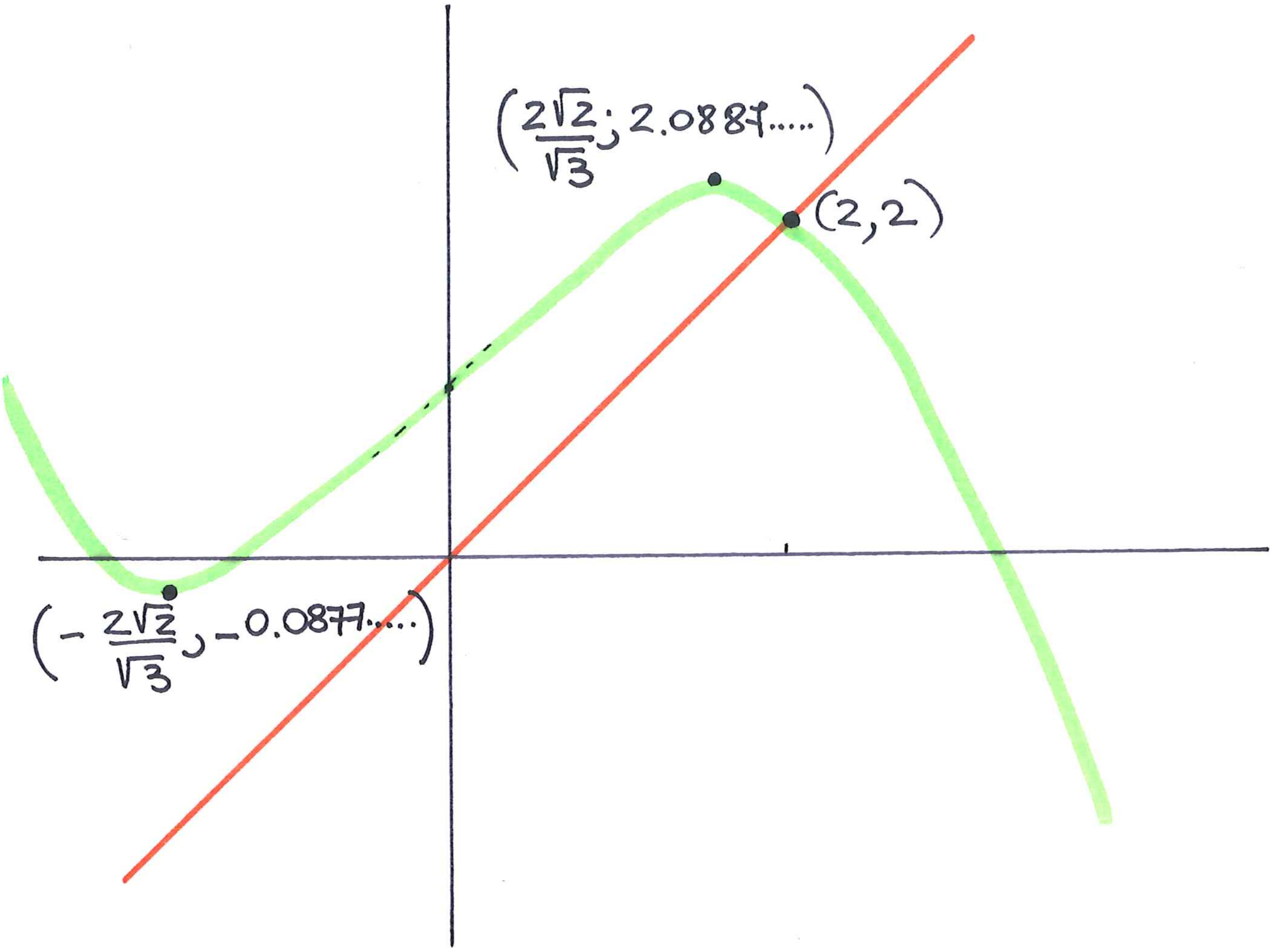
$-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx -1.633 \qquad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 1.633$

$$g\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\cancel{8}}\,\frac{\sqrt{2}\cdot \overset{2}{\cancel{16}}}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \approx -0.0877$$

$$g\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\cancel{8}}\,\frac{\overset{2}{\cancel{16}}\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 1 + 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \approx 2.0887$$

$$g'(2) = 1 - \frac{3}{8}\cdot 4 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \text{conv. locale}$$

1° ordine (2.3)



$|g'(x)| < 1$ $\qquad$ $\left|1 - \frac{3}{8}x^2\right| < 1$

$$\begin{cases} 1 - \frac{3}{8}x^2 < 1 \\ 1 - \frac{3}{8}x^2 > -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ \frac{3}{8}x^2 < 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{3}} < x < \underset{\simeq 2.31}{\frac{4}{\sqrt{3}}} \end{cases}$$

Per esempio $I = [1; 2.1]$

$g'(x) = 1 - \frac{3}{8}x^2 \qquad g''(x) = -\frac{3}{4}x < 0 \quad x \in I$

$\hookrightarrow$ decrescente

$$\underset{-0.6538}{g'(2.1)} \leq g'(x) \leq \underset{0.625}{g'(1)}$$

$|g'(x)| \leq 0.6538 = A, \; x \in I$

2.4) Sia $\alpha = 2$ il punto fisso.

Sia $\quad w_0 \in I$

↳ trovato al punto 2.2)

$$|w_K - \alpha| = |g(w_{K-1}) - g(\alpha)| = |g'(s)|\,|w_{K-1} - \alpha|$$

↓ Teorema Lagrange $\qquad \forall K \geq 1$, $s \in I$

$$|g'(s)| \leq A < 1$$

$$\Rightarrow |w_K - \alpha| \leq A\,|w_{K-1} - \alpha| \leq A^2\,|w_{K-2} - \alpha| \leq \dots$$

$$\leq A^K |w_0 - \alpha| \leq A^K \underbrace{\left(\max(I) - \min(I)\right)}_{C}$$

Sia $I = (1, 2.1) \Rightarrow \qquad C = 1.1$

$$A^K \cdot C = (0.6538)^K \cdot 1.1 < 10^{-4}$$

$$(0.6538)^K < \frac{10^{-4}}{1.1}$$

$$K > \frac{\ln\left(\frac{10^{-4}}{1.1}\right)}{-\ln 2} \approx 13.4252$$

$$\Rightarrow \bar{K} = 14$$