4) Si consideri il sistema lineare $Ax = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

4.1) Determinare per quali valori di a e solo per quelli i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono e trovare una relazione fra le velocità di convergenza;

4.2) Per i valori di a per i quali A risulta diagonalmente dominante calcolare la fattorizzazione $A = LU$ e le quantità $\|L\|_1$, $\|U\|_1$, $\|A\|_2$.

Milano 20-feb-14

Convergenza del metodo di Jacobi: $\det(\lambda D - E - F) = 0$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 & a & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & a \\ a & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & a & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \lambda & 0 \\ a & 0 & \lambda \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ \lambda & 0 & a \\ a & 0 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & a \\ a & \lambda \end{vmatrix} + a(-a) \begin{vmatrix} \lambda & a \\ a & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^2 - a^2) - a^2(\lambda^2 - a^2)$$

$$= (\lambda^2 - a^2)^2 = 0 \qquad \lambda = \pm a \qquad \rho(B_J) = |a| < 1$$

conv $\Longleftrightarrow$ $|a| < 1$ $(\wedge a \neq 0)$

Convergenza del metodo di Gauss-Seidel

$\det(\lambda D - E\lambda - F) = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & a & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & a \\ a\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & a\lambda & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \lambda & 0 \\ a\lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} + a\lambda \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ \lambda & 0 & a \\ a\lambda & 0 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & a \\ a\lambda & \lambda \end{vmatrix} + a\lambda(-a) \begin{vmatrix} \lambda & a \\ a\lambda & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2(\lambda^2 - a^2\lambda) - a^2\lambda(\lambda^2 - a^2\lambda) = \lambda^3(\lambda - a^2) - a^2\lambda^2(\lambda - a^2) =$$

$$\lambda^2(\lambda - a^2)^2 = 0 \qquad \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = a^2 \end{array} \qquad \rho(B_{GS}) = a^2 < 1$$

conv $\Longleftrightarrow$ $a^2 < 1$ $\quad |a| < 1$

$(\wedge\ a \neq 0)$

Relazione $\quad R(B_{GS}) = -\ln \rho(B_{GS}) = -\ln a^2 =$

$$= -2\ln|a| = 2(-\ln|a|) = 2R(B_J)$$

La velocità di convergenza del metodo di GS è doppia rispetto a quella " " " J.

Calcolo di $\|A\|_2$.

A è simmetrica (è anche def. pos. 1^ Teo Gershgorin)

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & a & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & a \\ a & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & a & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - a^2\right] + a(-a)\left[(1-\lambda)^2 - a^2\right] = 0$$

$$\left[(1-\lambda)^2 - a^2\right]^2 = 0 \qquad (1-\lambda)^2 = a^2$$

$$\lambda = 1 \pm a \quad \begin{cases} 1+a \\ 1-a \end{cases}$$

$-1 < a < 1 \qquad |\lambda_1| = 1+a \qquad |\lambda_2| = 1-a$

$\rho(A)$: $\quad 1+a \geq 1-a \quad a > 0$

$$\rho(A) = \begin{cases} 1+a & a > 0 \\ 1-a & a < 0 \end{cases} \implies 1 + |a|$$

$$\|A\|_2 = 1 + |a|$$

Diag. dominante: $1 > |a|$

$\Rightarrow$ Fatt. LU senza Pivoting

$m_{31} = a$

$a_{33} = 1 - a^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$m_{42} = a \qquad a_{44} = 1 - a^2$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^2 \end{bmatrix}$$

$$\|M\|_2 = \sqrt{\rho(M^T M)}$$

$$\|M\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |m_{ij}|$$

$\|L\|_1 = 1 + |a|$

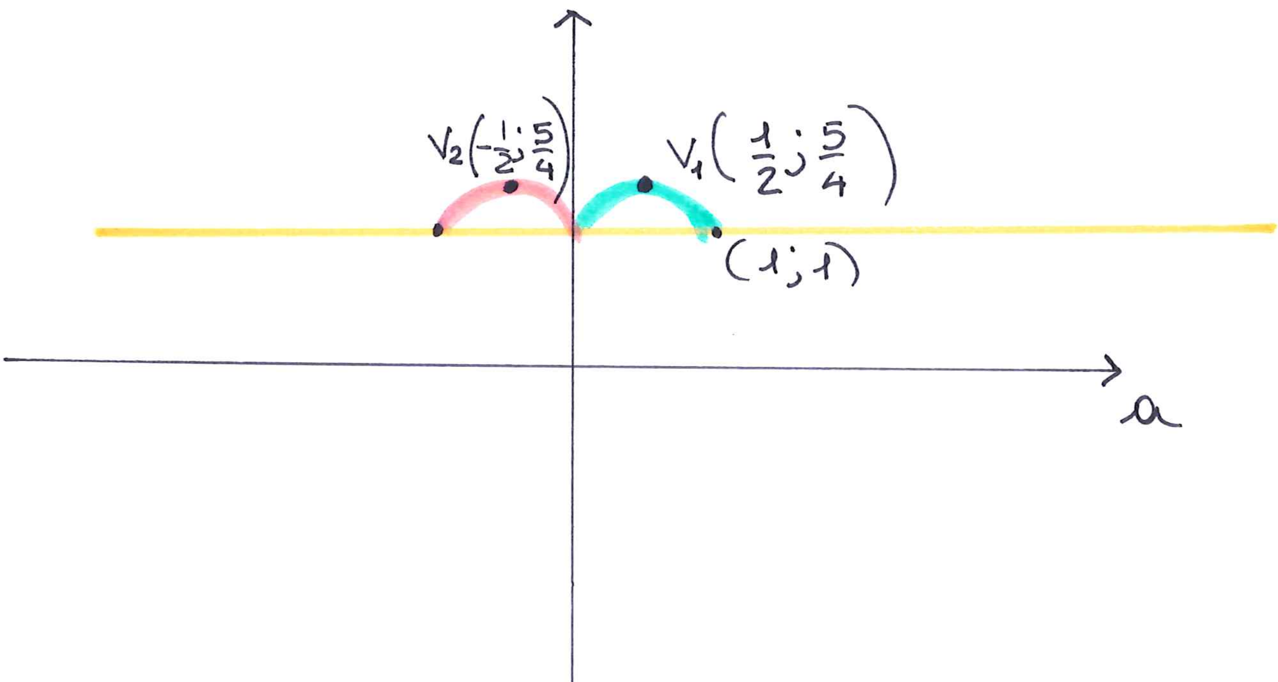
$\|U\|_1 = \max\{1, |a| + |1-a^2|\} =$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$|1-a^2| = 1 - a^2 \qquad (a \in (-1,1))$

$$\|U\|_1 = \begin{cases} \max\{1, 1-a^2+a\} & \text{se } a > 0 \\ \max\{1, 1-a^2-a\} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

- $\cancel{1} - a^2 + a \geq \cancel{1} \qquad a^2 - a < 0 \qquad 0 < a \leq 1 \qquad$ ok
- $\cancel{1} - a^2 - a \geq \cancel{1} \qquad a^2 + a < 0 \qquad -1 \leq a < 0 \qquad$ ok



$\Rightarrow \|U\|_2 = |a| + 1 - a^2$
$\forall\, a \in [-1, 1] \setminus \{0\}$