5) Sia P_N il polinomio ortogonale di Legendre di grado $N \geq 1$. Dimostrare che P_N ha N radici reali distinte appartenenti all'intervallo $(-1, 1)$.

MI 20 feb 2014

Siano $x_1, x_2, \dots, x_m$ gli zeri di P_N per cui si ha:

1) $-1 < x_i < 1 \quad i = 1, \dots, m$

2) P_N cambia segno in x_i, cioè x_i è una radice di molteplicità dispari

Se $m = N$ la tesi è dimostrata

Sia per assurdo $m < N$

Definiamo $B_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)$, da cui

$P_N(x) B_m(x) = P_N(x)(x - x_1) \dots (x - x_m)$ è un polinomio di grado $N+m$ le cui radici $x_1, \dots, x_m$ hanno molteplicità pari.

Si ha $\int_{-1}^{1} P_N(x) B_m(x) \neq 0$, poiché $P_N(x) B_m(x)$ non cambia segno negli x_i e ovviamente non è il polinomio identicamente nullo.

Ma essendo $m < N$ per ipotesi, per l'ortogonalità dei polinomi di Legendre su $(-1,1)$ rispetto al peso $w(x) = 1$, si ha

$$\int_{-1}^{1} P_N(x) B_m(x) = 0$$

dunque si ha un assurdo

$\Rightarrow m = N$, ovvero P_N ha N radici reali e distinte $\in (-1, 1)$.

CVD