CALCOLO NUMERICO 1 (30 Gennaio 2014)

1) Trovare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)}$$

e stabilire per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 1$.

$$K_f(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| \qquad \underline{C.E\ (f, f') : \ (0, 1)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}} \cdot (1-2x)$$

$$K_f(x) = \left| \frac{x\,(1-2x)}{2\sqrt{x(1-x)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \right| = \left| \frac{\cancel{x}(1-2x)}{2\cancel{x}(1-x)} \right| =$$

$$\left| \frac{1-2x}{2(1-x)} \right| < 1 \qquad \left| \frac{1-2x}{1-x} \right| < 2$$

N.B
$1 - x > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{1-2x}{1-x} < 2 \\[2ex] \dfrac{1-2x}{1-x} > -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-2x < 2-2x \\[2ex] 1-2x > -2+2x \end{cases} \qquad \begin{cases} \forall x \ (\in C.E.) \\[2ex] 3 > 4x \quad x < \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

B.C. $\quad 0 < x < \dfrac{3}{4}$

2) Si vuole approssimare l'integrale definito $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, $f \in C^\infty[0,1]$, mediante una formula di quadratura del tipo

$$\tilde{I}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f^{(k)}(1/3),$$

con n intero non negativo. Trovare il minimo valore di n, ed i corrispondenti valori dei pesi A_k, in modo tale che la formula abbia grado di precisione uguale ad uno. Generalizzare la formula di quadratura all'integrale definito $I = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

M1

30|01|2014

$$\tilde{I}(f) = A_0 f\left(\frac{1}{3}\right) + A_1 f'\left(\frac{1}{3}\right) + A_2 f''\left(\frac{1}{3}\right) \ldots$$

$r=0 \quad f=1 \quad f'=f''=\ldots=0$

$\int_0^1 dx = 1 \qquad A_0 = 1$

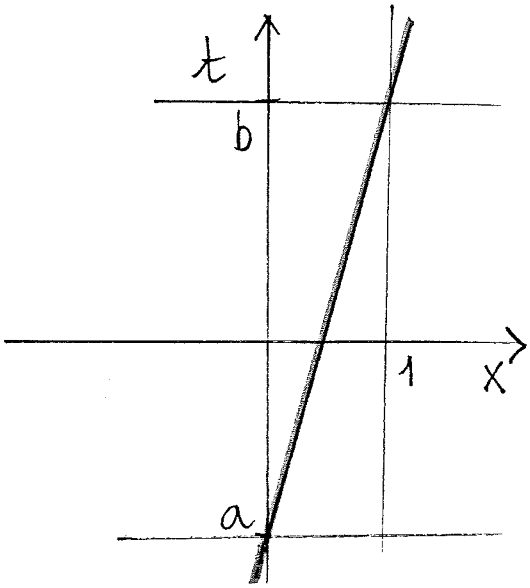
$r=1 \quad f=x \quad f'=1 \quad f''=f'''=\ldots=0$

$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \qquad 1 \cdot \frac{1}{3} + A_1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$A_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$$\tilde{I}(f) = f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6} f'\left(\frac{1}{3}\right)$$

Generalizzazione a: $\int_a^b f(t)dt$



$t = a + (b-a)x$

$x=0 \quad t=a$

$x=1 \quad t=b$

$dt = (b-a)dx$

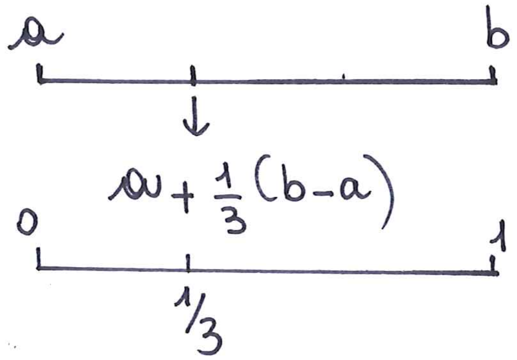
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_0^1 f\big(a+(b-a)x\big)(b-a)\,dx =$$

$$= (b-a)\int_0^1 f\big(a+(b-a)x\big)\,dx \underset{\tilde{I}}{\approx}$$

$$(b-a)\left[f\Big(\underbrace{a+\tfrac{1}{3}(b-a)}_{\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b}\Big) + \frac{1}{6}\underbrace{f'\Big(a+\tfrac{1}{3}(b-a)\Big)(b-a)}_{\frac{df}{dt}\,\frac{dt}{dx}} \right]$$

OPPURE:

$$\int_a^b f(t)\,dt$$



$$\tilde{I} = A\, f\Big(\tfrac{1}{3}(b-a)+a\Big) + B\, f'\Big(\tfrac{1}{3}(b-a)+a\Big)$$

$r=0 \quad f=1 \qquad\qquad A = b-a$

$r=0 \quad f=x,\ f'=1$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$$

F.Q.

$$(b-a)\left[\frac{1}{3}(b-a)+a\right]+B=\frac{(b-a)(b+a)}{2}$$

$$B=(b-a)\left[\frac{b+a}{2}-\frac{1}{3}(b-a)+a\right]=$$

$$=(b-a)\,\frac{3b+3a-2b+2a-6a}{6}=$$

$$=\frac{(b-a)(b-a)}{6}$$

3) Data la funzione $f(x) = x(x-2)^2$ studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l' ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, dove $g(x) = x + f(x)$.

M1

30/01/2014

$$f(x) = x(x-2)^2$$

$\alpha = 0 \quad p = 1$ (molteplicità)

$\beta = 2 \quad p = 2$

$$g(x) = x + x(x-2)^2 = x\left(1 + x^2 - 4x + 4\right) = x\,\underbrace{\left(x^2 - 4x + 5\right)}_{>0}$$

$$x = g(x)$$

Studio $y = g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$

$g(0) = 0$

$g(x) = 0 \iff x = 0$

$g(x) > 0 \quad x > 0$

P.F. (verifica) $\quad 0 = g(0) \quad [\alpha]$

$\qquad 2 = 2(4 - 8 + 5) \quad [\beta]$

$g'(x) = 3x^2 - 8x + 5 \geq 0 \qquad x \leq 1 \ \vee \ x \geq \frac{5}{3}$

	1		$5/3$	
$+$		$-$		$+$

$M(1; 2)$

$m\left(\frac{5}{3}; \frac{50}{27}\right)$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{125}{27} - \frac{100}{9} + \frac{25}{3} =$$

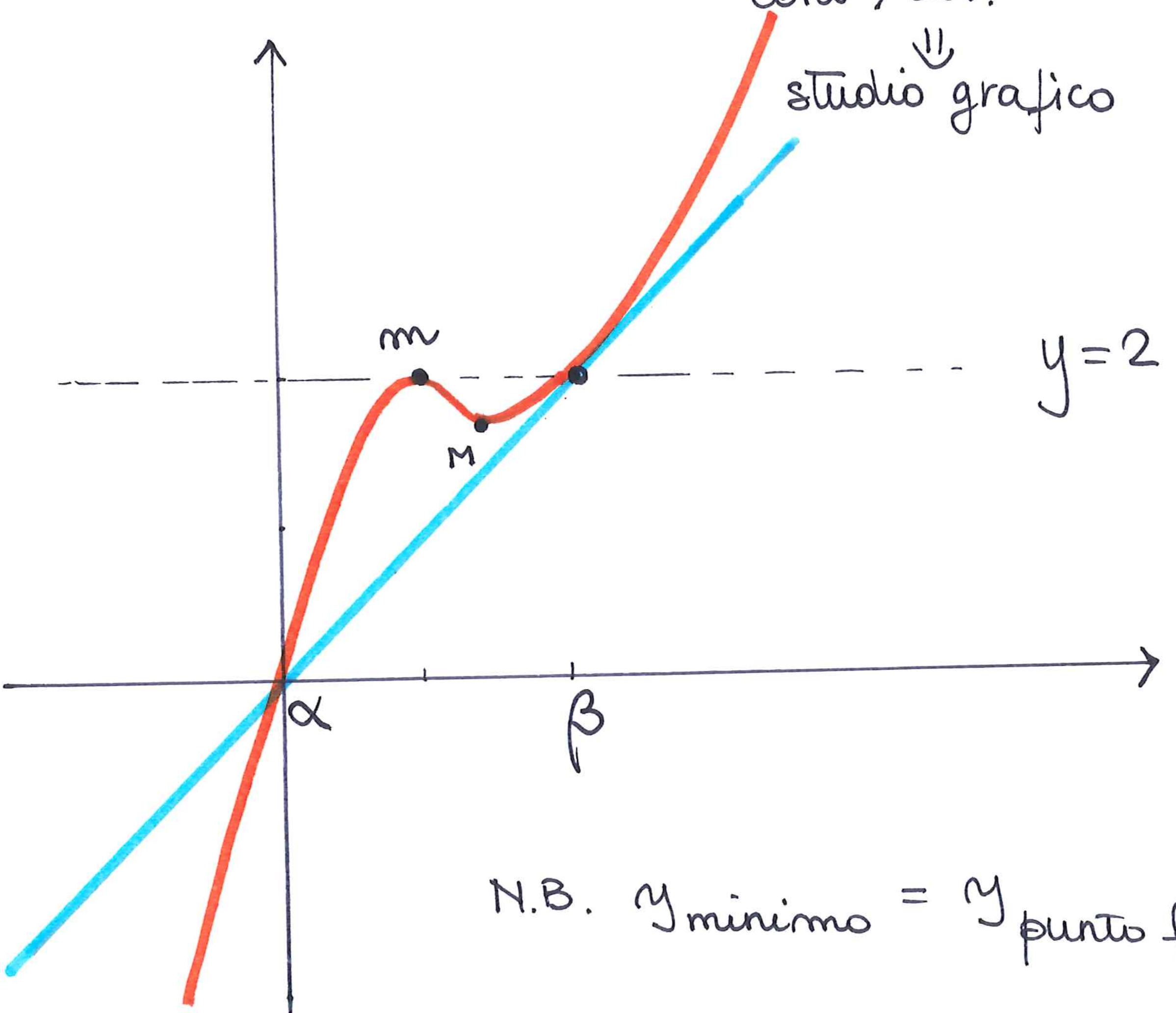
$$\frac{125 - 300 + 225}{27} = \frac{50}{27}$$

$g'(0) = 5 > 1$ (Divergenza locale)

$g'(2) = 12 - 16 + 5 = 1$ Non si può dedurre conv/div.

$\Downarrow$

studio grafico



N.B. $y_{\text{minimo}} = y_{\text{punto fisso } \beta}$

1) $x_0 < \alpha$ succ. mon. decr. ill. inf $(g(x) < x < 0)$

$\Rightarrow x_n \searrow -\infty$

2) $x_0 = \alpha$ "$x_n = \alpha$"

3) $\alpha < x_0 < \beta$ $\exists\, \bar{n}$ t.c. $x_{\bar{n}} \in \left(\frac{5}{3} ; 2\right)$

$\Downarrow$ $\quad \frac{5}{3} \downarrow$ $x(M)$ ascissa di M

$n > \bar{n}$ succ. mon. cresc. lim. sup da β

$\frac{5}{3} < x < g(x) < 2$

ord. conv. 1

4) $x_0 = \beta \Rightarrow$ "$x_n = \beta$"

5) $x_0 > \beta$ succ. mon. cresc. ill. sup $(g(x) > x > 2)$

$\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$

$\Rightarrow x_0 \in (\alpha, \beta]$ $\quad x_n \to \beta$

$\downarrow$

attenzione, $x_0 = \beta$ convergenza "teorica"

4) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia B_ω la matrice di iterazione del metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \omega \mathbf{x}_{JAC}^{k+1/2} + (1-\omega)\mathbf{x}^{(k)}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

dove, $\forall k \geq 0$, $\mathbf{x}_{JAC}^{k+1/2}$ è un vettore ausiliario intermedio applicando un passo del metodo di Jacobi al vettore $\mathbf{x}^{(k)}$. Costruire la matrice B_ω, calcolare $det(B_\omega)$ e determinare se esistono valori di ω per i quali si ha $\|B_\omega\|_\infty \leq 1$.

M1

30/01/14

$$A = D - E - F$$

$$\underline{X}^{(k)} \rightarrow \underline{X}_{JAC}^{(k+\frac{1}{2})} \rightarrow \underline{X}^{(k+1)}$$

$$\underline{X}_{JAC}^{k+\frac{1}{2}} = D^{-1}(E+F)\underline{X}^{(k)} + D^{-1}b$$

$$\underline{X}^{(k+1)} = \omega D^{-1}(E+F)\underline{X}^{(k)} + \omega D^{-1} b + (1-\omega)\underline{X}^{(k)}$$

$$B_\omega = \omega D^{-1}(E+F) + (1-\omega) I =$$

$$\omega \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix}$$

$$= \omega \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1-\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\omega & -\frac{1}{2}\omega \\ -\omega & 0 & -\omega \\ \frac{1}{2}\omega & \frac{1}{2}\omega & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ & = & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$B_\omega = \begin{bmatrix} 1-\omega & \frac{1}{2}\omega & -\frac{1}{2}\omega \\ -\omega & 1-\omega & -\omega \\ \frac{1}{2}\omega & \frac{1}{2}\omega & 1-\omega \end{bmatrix}$$

$$\det(B_\omega) = (1-\omega)\left[(1-\omega)^2 + \frac{\omega^2}{2}\right]$$

$$+ \omega \left[\frac{1}{2}\omega(1-\omega) + \frac{1}{4}\omega^2\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\omega \left[-\frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega(1-\omega)\right]$$

$$= (1-\omega)^3 + (1-\omega)\frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2(1-\omega) + \cancel{\frac{1}{4}\omega^3} - \cancel{\frac{1}{4}\omega^3} + \frac{1}{4}\omega^2(1-\omega) =$$

$$= (1-\omega)^3 + (1-\omega)\left(\frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^2}{4}\right) =$$

$$= (1-\omega)^3 + (1-\omega)\left(\frac{5}{4}\omega^2\right) = (1-\omega)\left[(1-\omega)^2 + \frac{5}{4}\omega^2\right]$$

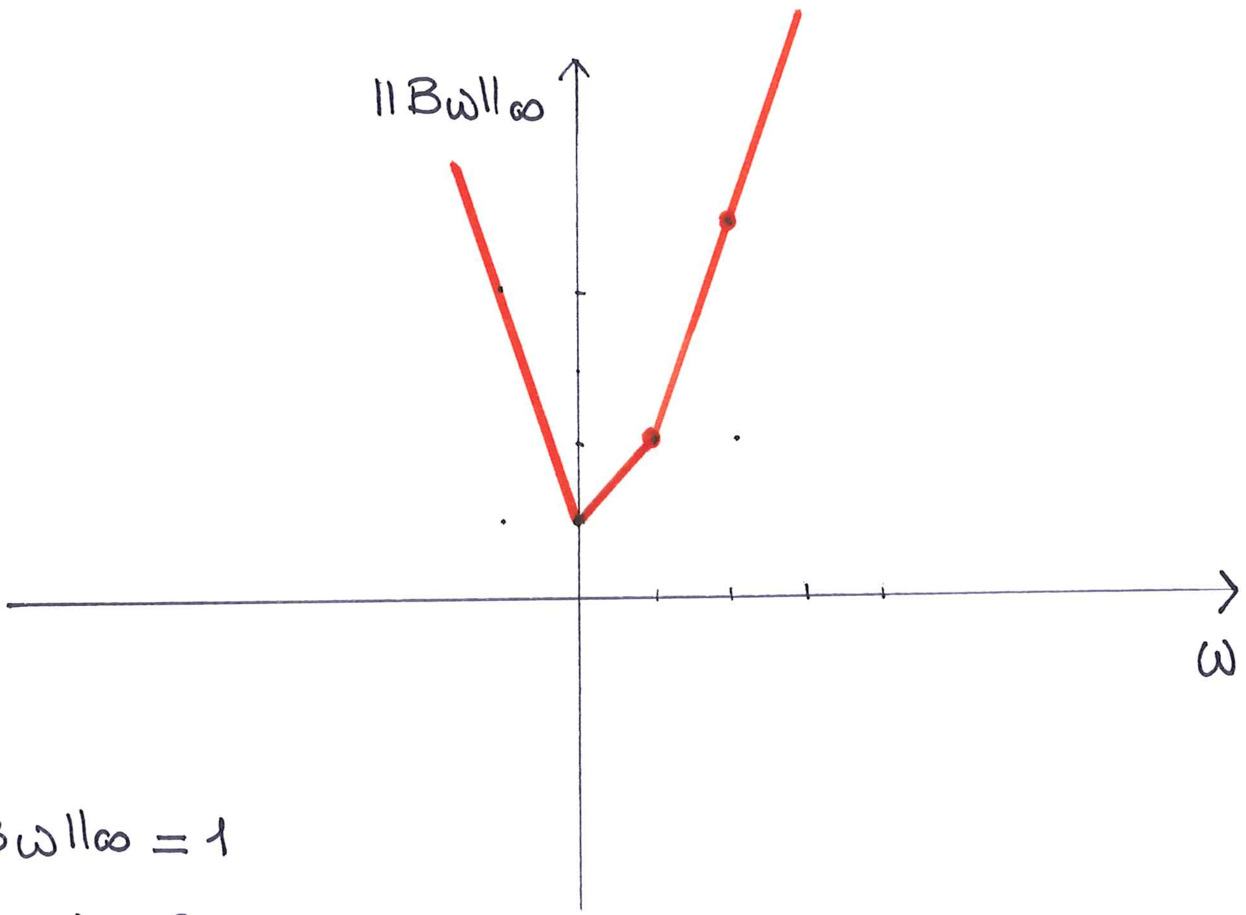
$$\|B_\omega\|_\infty = \max\left\{|1-\omega| + |\omega| ; 2|\omega| + |1-\omega| ; |\omega| + |1-\omega|\right\}$$

$$= \max\left\{|1-\omega| + |\omega| ; 2|\omega| + |1-\omega|\right\} = 2|\omega| + |1-\omega|$$

$\omega < 0$ $\quad \|B_\omega\|_\infty = -2\omega + 1 - \omega = 1 - 3\omega$

$0 \leq \omega < 1$ $\quad \|B_\omega\|_\infty = 2\omega + 1 - \omega = \omega + 1$

$\omega \geq 1$ $\quad \|B_\omega\|_\infty = 2\omega + \omega - 1 = 3\omega - 1$



$\|B_\omega\|_\infty = 1$

se $\omega = 0$

che corrisponde al metodo iterativo

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} = \dots = \underline{x}^{(0)} \quad \forall\, k \geq 0$$

5) Verificare che per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simmetrica e definita positiva:

5.1) gli elementi della diagonale principale sono positivi;

5.2) l'elemento di modulo massimo si trova sulla diagonale principale.

M1

30/01/2014

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

5.1. Applicando la definizione

$$(Ax, x) = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) =$$

$$(ax_1 + bx_2)x_1 + (bx_1 + cx_2)x_2 =$$

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 > 0 \quad \forall\ (x_1, x_2) \neq (0,0)$$

ES: $(x_1, x_2) = (1, 0) \Rightarrow a > 0$

$(x_1, x_2) = (0, 1) \Rightarrow c > 0$

5.2. Se fosse $a < |b|$

e $c < |b|$

si avrebbe $ac < b^2$

cioè $ac - b^2 < 0$ $\det A < 0$ (assurdo)

oppure si applichi il criterio di Sylvester