A matrice triangolare inferiore.

Si può fattorizzare in modo banale con $U = I$

$$A = L \cdot U \qquad \begin{aligned} L &= A \\ U &= I \end{aligned}$$

$$L^{-1} = M_{n-1} M_{n-2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot M_1$$

$$L^{-1} A = U \quad \text{dunque} \quad \begin{aligned} A &= L \\ A^{-1} &= L^{-1} \end{aligned}$$

$$\| A^{-1} \|_\infty = \| L^{-1} \|_\infty \leq \| M_{n-1} \|_\infty \cdot \| M_{n-2} \|_\infty \dots \| M_1 \|_\infty$$

È richiesta la maggiorazione di $\| A^{-1} \|_\infty$, non il calcolo degli elementi di A^{-1}!

Dalla teoria:

$$M_K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \boxed{} & 1 & & O \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\begin{matrix} m_{K+1,K} \\ m_{K+2,K} \\ \vdots \\ m_{n,K} \end{matrix}}$$

sottocolonna K-esima dei moltiplicatori

$$M_K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & & \\ & & -1 & \ddots & \\ & & -1 & & \ddots \\ & & \vdots & & \\ & & -1 & & & 1 \end{pmatrix} \dashrightarrow \text{Riga } K$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & 1 & & \ddots \\ & & & \vdots & & \\ & & & 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \|M_k\|_\infty = 2 \qquad \forall k$$

Dunque

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \overbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}^{n-1} \text{ volte} = 2^{n-1}$$

Matrici elementari di Gauss

Il generico passo di eliminazione è equivalente alla premoltiplicazione per la matrice

$$\boxed{M_k = I - m_k e_k^T}$$ dove

$$m_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ m_{k+1,k} \\ m_{k+2,k} \\ \vdots \\ m_{n,k} \end{pmatrix} \qquad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{riga } k$$

$$\boxed{m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}}$$

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ 0 & & & -m_{k+1,k} & \ddots & \\ & & & \vdots & & \\ & & & -m_{n,k} & & 1 \end{pmatrix}$$

Dopo $n-1$ passi

$$\overbrace{M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_2 M_1}^{L^{-1}} A = A^{(n)} \Rightarrow A = L A^{(n)}$$

$$L = (M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_1)^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}; \quad U = A^{(n)}$$

$$M_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & m_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & & 1 \\ & & m_{n,k} & & \end{pmatrix}$$

da cui

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & & m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Nel caso siano richieste matrici di permutazione

$$\underbrace{(M_{n-1} P_{n-1})(M_{n-2} P_{n-2}) \dots (M_1 P_1)}_{B} A = U$$

$$P = P_{n-1} P_{n-2} \dots P_1$$

$$L = P \underbrace{(M_{n-1} P_{n-1} \dots M_1 P_1)}_{B}^{-1}$$

$$BA = U \qquad A = B^{-1} U \qquad \begin{aligned} PA &= LU \\ PA &= \underbrace{PB^{-1}}_{L} U \end{aligned}$$