ESERCIZIO 1

Dati per costruire il polinomio di interpolazione:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 1, \quad x_1 = 1,\ y_1 = 0, \quad x_2 = 2,\ y_2 = -1, \quad x_3 = 3,\ y_3 = 0.$$

Con il metodo di Lagrange:

$$p_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i L_i(x) = L_0(x) - L_2(x).$$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)(-3)} = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$L_2(x) = \frac{x(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} = -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)$$

$$p_3(x) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+\frac{1}{2}x(x-1)(x-3) = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}+x) =$$

$$\frac{1}{3}(x-1)(x-3)(x+1) = \frac{1}{3}(x^2-1)(x-3) = \frac{1}{3}(x^3-3x^2-x+3) = \frac{x^3}{3}-x^2-\frac{x}{3}+1$$

Con il metodo delle differenze divise:

$a_0 = \boxed{f_0 = 1}\ ,\ f_1 = 0,\ f_2 = -1,\ f_3 = 0;$
$a_1 = \boxed{f_{01} = -1}\ ,\ f_{12} = -1,\ f_{23} = 1;$
$a_2 = \boxed{f_{012} = 0}\ ,\ f_{123} = 1;$
$a_3 = \boxed{f_{0123} = 1/3}.$

$$p_3(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x(x-1)(x-2) = ... = \frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{x}{3} + 1$$

Errore di interpolazione nel punto $x = \frac{3}{2}$:

$$\left| f\left(\frac{3}{2}\right) - p_3\left(\frac{3}{2}\right) \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{8} \right| \approx 0.70710678 - 0.625 = 0.08210678$$

Maggiorazione dell'errore:

$$\max_{x\in[0,3]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \max_{x\in[0,3]} |x(x-1)(x-2)(x-3)| \max_{t\in[0,3]} |f^{(IV)}(t)|,$$

con $\displaystyle\max_{x\in[0,3]} |x(x-1)(x-2)(x-3)| \leq 3{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}3 = 36,\ |f^{(IV)}(t)| = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right|.$

$$\Longrightarrow \max_{x\in[0,3]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{36}{24}\frac{\pi^4}{16} \approx 9.132102$$

ESERCIZIO 2

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c, \quad p_2'(x) = 2ax + b$$

Imponendo le tre condizioni si ottiene:

$p_2(0) = c = f(0);$
$p_2'(0) = b = f'(0);$
$p_2(1) = a + b + c = f(1) \quad \Longrightarrow a = f(1) - f(0) - f'(0).$

da cui:

$$p_2(x) = [f(1) - f(0) - f'(0)]x^2 + f'(0)x + f(0).$$

Formula di quadratura:

$$\widetilde{I}(f) = \int_0^1 p_2(x)dx \; = \int_0^1 (ax^2+bx+c)dx = \Big[a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\Big]_0^1 = \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c =$$

$$\frac{1}{3}[f(1)-f(0)-f'(0)]+\frac{1}{2}f'(0)+f(0) = \frac{1}{3}f(1)-\frac{1}{3}f(0)-\frac{1}{3}f'(0)+\frac{1}{2}f'(0)+f(0) =$$

$$\frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0),$$

da cui

$$a_0 = \frac{2}{3}, \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{1}{6}.$$

ESERCIZIO 3

Si osservi che, essendo la matrice simmetrica, si ha:

$$K_2(A) = \|A\|_2 \; \|A^{-1}\|_2 = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}$$

Applicando il primo teorema di Gershgorin si ottiene:

<u>Riga 1</u>:

$$|\lambda - (n^2+1)| \leq 2 \Leftrightarrow n^2+1-2 \leq \lambda \leq n^2+1+2 \Leftrightarrow \boxed{n^2-1} \leq \lambda \leq \boxed{n^2+3}$$

<u>Riga $i = 2, ..., n-1$</u>:

$$|\lambda - (n+1)| \leq 2 \Leftrightarrow n+1-2 \leq \lambda \leq n+1+2 \Leftrightarrow \boxed{n-1} \leq \lambda \leq \boxed{n+3}$$

<u>Riga n</u>:

$$|\lambda - (n^2-1)| \leq 2 \Leftrightarrow n^2-1-2 \leq \lambda \leq n^2-1+2 \Leftrightarrow \boxed{n^2-3} \leq \lambda \leq \boxed{n^2+1}$$

Facilmente si osserva che, essendo $n \geq 3$, valgono le seguenti disequazioni:

$n-1 < n^2-3 < n^2-1...$
$n^2+3 > n^2+1, \quad n^2+3 > n+3$

Dunque dall'unione dei tre intervalli di Gershgorin (la matrice è simmetrica, gli autovalori sono reali e in particolare i cerchi di Gershgorin sono di fatto intervalli di $\mathbb{R}$) si ha:

$$n-1 \leq \lambda \leq n^2+3.$$

In particolare, essendo $n \geq 3$, gli autovalori di A oltre ad essere tutti reali sono anche tutti positivi, e valgono le due relazioni:

$$\max_i |\lambda_i(A)| = \max_i \lambda_i(A) \leq n^2+3$$

$$\min_i |\lambda_i(A)| = \min_i |\lambda_i(A)| \geq n-1.$$

Si conclude:

$$K_2(A) = \frac{\max_i \lambda_i(A)}{\min_i \lambda_i(A)} \leq \frac{n^2+3}{n-1}.$$

Applicazione di un passo del metodo delle potenze:

$\|\mathbf{z}_0\|_2 = 5, \quad \mathbf{y}_0 = (0,1,0)^T, \quad \mathbf{z}_1 = A\mathbf{y}_0$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}_1},$$

$\sigma_0 = \mathbf{z}_1^T \cdot \mathbf{y}_0 = (-1)(0) + 4 \cdot 1 + (-1)(0) = 4 \approx \lambda_1$

ESERCIZIO 4

Si vedano gli appunti **PDFav1**, 5 maggio 2008, sulla pagina web del corso di Milano, a.a. 2007-2008, *Diario delle lezioni e materiale didattico.*