ESERCIZIO 2

Si osservi che, essendo la matrice simmetrica, si ha:

$$K_2(A_k) = \|A_k\|_2 \ \|A_k^{-1}\|_2 = \frac{\max_{1\leq i\leq 5} |\lambda_i(A_k)|}{\min_{1\leq i\leq 5} |\lambda_i(A_k)|},$$

gli autovalori di A_k sono reali e i cerchi di Gershgorin sono intervalli di $\mathbb{R}$. Applicando il primo teorema di Gershgorin e tenendo conto che $0 < k < 1$ si ottiene:

<u>Righe 1 e 5</u>:

$|\lambda - 1| \leq k \Leftrightarrow \boxed{1-k} \leq \lambda \leq \boxed{1+k}$

<u>Righe 2, 3, 4</u>:

$|\lambda - (k^2+1)| \leq 2k \Leftrightarrow \boxed{(1-k)^2} \leq \lambda \leq \boxed{(1+k)^2}$,

con

$$0 < (1-k)^2 < 1-k < 1 < 1+k < (1+k)^2,$$

da cui si deduce anche che gli autovalori sono strettamente positivi. Dunque:

$$\max_{1\leq i\leq 5} |\lambda_i(A)| = \max_{1\leq i\leq 5} \lambda_i(A) \leq (1+k)^2$$

$$\min_{1\leq i\leq 5} |\lambda_i(A)| = \min_{1\leq i\leq 5} \lambda_i(A) \geq (1-k)^2.$$

Si conclude:

$$K_2(A_k) = \frac{\max_{1\leq i\leq 5} \lambda_i(A_k)}{\min_{1\leq i\leq 5} \lambda_i(A_k)} \leq \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2.$$

Infine

$$\lim_{k\to 0^+} \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 = 1, \quad \lim_{k\to 1^-} \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2 = +\infty.$$

ESERCIZIO 3

La retta p_1 passante per i punti $(-\alpha, y_0)$, (α, y_2) si può facilmente ottenere per esempio con il metodo delle differenze divise:

$$a_0 = y_0; \ a_1 = \frac{y_2 - y_0}{2\alpha}, \ p_1(x) = a_0 + a_1(x+\alpha),$$

da cui si ha

$$p_1(x) = \boxed{\frac{y_2 - y_0}{2\alpha}} \, x + \frac{1}{2}(y_0 + y_2).$$

Per costruire la retta dei minimi quadrati discreti $p_1^*(x) = a_0^* + a_1^* x$ si risolve il sistema delle equazioni normali $A\mathbf{a}^* = \mathbf{b}$, dove gli elementi della matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ e del termine noto $\mathbf{b}$ sono dati da:

$$a_{11} = 3;\ a_{12} = a_{21} = \sum_{i=0}^{2} x_i = 0;\ a_{22} = \sum_{i=0}^{2} x_i^2 = 2\alpha^2,$$

$$b_1 = \sum_{i=0}^{2} y_i = y_0 + y_1 + y_2,\ b_2 = \sum_{i=0}^{2} x_i y_i = \alpha(y_2 - y_0).$$

Si ottiene il sistema diagonale di equazioni:

$$\begin{aligned} 3a_0^* &= y_0 + y_1 + y_2 \\ 2\alpha^2 a_1^* &= \alpha(y_2 - y_0) \end{aligned}$$

da cui si ricava che il coefficiente angolare

$$a_1^* = \boxed{\frac{y_2 - y_0}{2\alpha}}$$

della retta dei minimi quadrati discreti p_1^* coincide con quello della retta p_1 passante per i punti $(-\alpha, y_0)$, (α, y_2).

Nel caso particolare $\alpha = 2$ e $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ si ha:

$(x_0, y_0) = (-2, -1)$, $(x_1, y_1) = (0, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, -1)$.

Il polinomio p_2 si può per esempio ottenere con il metodo delle differenze divise:

$$a_0 = 2,\ a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ p_2(x) = a_0 + a_1(x+2) - \frac{1}{2}(x+2)x = -\frac{1}{2}x^2 + 1.$$

Per la maggiorazione dell'errore:

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{3!}|(x+2)x(x-2)| \max_{t\in[-2,2]} |f^{(3)}(t)|.$$

In particolare:

A) $|\omega(x)| = |(x+2)x(x-2)| \leq 4 \cdot 2 \cdot 4 = 32$,

oppure, in modo più rigoroso si procede calcolando il massimo di $|\omega|$ sull'intervallo $[-2, 2]$. Si ha:

B) $\omega'(x) = 3x^2 - 4 \geq 0$ per $x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $x \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, da cui

$$|\omega(x)| \leq |\omega(\pm\frac{2}{\sqrt{3}})| = \frac{16}{3\sqrt{3}},\ x \in [-2, 2].$$

Inoltre

$$f^{(3)}(t) = \frac{\pi^3}{8}\sin\frac{\pi}{2}t, \quad \max_{t\in[-2,2]}|f^{(3)}(t)| = \frac{\pi^3}{8}$$

Concludendo si ha:

$$A)|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{6}32\frac{\pi^3}{8} = \frac{2}{3}\pi^3 \approx 20.67085.$$

$$B)|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{6}\frac{16}{3\sqrt{3}}\frac{\pi^3}{8} = \frac{\pi^3}{9\sqrt{3}} \approx 1.989.$$

ESERCIZIO 4

4.1) Grado di precisione:

$$\begin{array}{llllllll}
r = 0: & I(1) & = \int_0^3 \mathrm{d}x & = 3; & \widetilde{I}(1) & = A+ & B+ & C. \\
r = 1: & I(x) & = \int_0^3 x\mathrm{d}x & = \frac{9}{2}; & \widetilde{I}(x) & = & 2B+ & 3C. \\
r = 2: & I(x^2) & = \int_0^3 x^2\mathrm{d}x & = 9; & \widetilde{I}(x^2) & = & 4B+ & 9C.
\end{array}$$

Dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{array}{llll}
A+ & B+ & C & = 3 \\
 & 2B+ & 3C & = \frac{9}{2}. \\
 & 4B+ & 9C & = 9.
\end{array}$$

si ha $A = \frac{3}{4}$, $B = \frac{9}{4}$, $C = 0$, da cui $\widetilde{I}(f) = \frac{3}{4}f(0) + \frac{9}{4}f(2)$.

4.2) $I(x^3) = [\frac{x^4}{4}]_0^3 = \frac{81}{4} = 20.25$; $\widetilde{I}(x^3) = \frac{9}{4}(2^3) = 18$. $E = 2.25$.

4.3) Si utilizza la stima dell'errore

$$I(f) - \widetilde{I}(f) = -\frac{b-a}{12}H^2 f^{(2)}(t),$$

con $a = 0$, $b = 3$, $H = \frac{3}{M}$, $f^{(2)}(t) = 6t$. Si ha dunque:

$$|I(f) - \widetilde{I}(f)| \leq \frac{3}{12}\left(\frac{3}{M}\right)^2 \max_{0\leq t\leq 3}|6t| = \frac{81}{2}\frac{1}{M^2} \leq E = 2.25, \text{ se } M^2 \geq 18.$$

Si conclude che per $M = 5$ la formula dei trapezi compositi approssima l'integrale I con un errore inferiore alla tolleranza E prefissata.