ESERCIZIO 2

Si utilizza la stima dell'errore

$$I(f) - I_T^C(f) = -\frac{b-a}{12} H^2 f^{(2)}(t),$$

con $a = 0$, $b = \pi$, $H = \frac{\pi}{M}$, $f^{(2)}(t) = -2\cos 2t$. Si ha dunque:

$$|I(f) - I_T^C(f)| \leq \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{M}\right)^2 \max_{0\leq t\leq \pi} |-2\cos 2t| = \frac{\pi^3}{6M^2} \leq 10^{-2}, \text{ se } M^2 \geq \frac{100\pi^3}{6} \approx 517.$$

Si conclude che per $M = 23$ la formula dei trapezi compositi approssima l'integrale dato con un errore inferiore alla tolleranza 10^{-2} prefissata.

ESERCIZIO 3

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

3.1) Si osservi che, essendo la matrice simmetrica, si ha:

$$K_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 = \frac{\max_{1\leq i\leq 4} |\lambda_i(A)|}{\min_{1\leq i\leq 4} |\lambda_i(A)|},$$

gli autovalori di A sono reali e i cerchi di Gershgorin sono intervalli di $\mathbb{R}$. Applicando il primo teorema di Gershgorin:

$$|\lambda - \alpha| \leq 2 \Leftrightarrow \boxed{\alpha - 2} \leq \lambda \leq \boxed{\alpha + 2}$$

In particolare, se $\alpha > 2$, si ha:

$$\max_{1\leq i\leq 4} |\lambda_i(A)| = \max_{1\leq i\leq 4} \lambda_i(A) \leq \alpha + 2$$

$$\min_{1\leq i\leq 4} |\lambda_i(A)| = \min_{1\leq i\leq 4} \lambda_i(A) \geq \alpha - 2.$$

Si conclude:

$$K_2(A) = \frac{\max_{1\leq i\leq 4} \lambda_i(A)}{\min_{1\leq i\leq 4} \lambda_i(A)} \leq \frac{\alpha+2}{\alpha-2}.$$

3.2) Matrice di iterazione del metodo di Jacobi: $B_J = -D^{-1}(L + U)$

$$B_J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\|B_J\|_\infty = \dfrac{2}{|\alpha|} < 1$, se $|\alpha| > 2$.

3.3) Matrici N e P : $N = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{\alpha}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$;

Matrice di iterazione $B = N^{-1}P$:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{\alpha}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\alpha}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{\alpha} & 0 & -\frac{2}{\alpha} \\ \frac{2}{\alpha} & -1 & \frac{2}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\alpha} & -1 & \frac{2}{\alpha} \\ -\frac{2}{\alpha} & 0 & \frac{2}{\alpha} & -1 \end{pmatrix};$$

$\|B\|_1 = 1 + \dfrac{4}{|\alpha|} > 1$, $\forall \alpha \neq 0$.

ESERCIZIO 4

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x < 1 \\ -\frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 2 & x \geq 1 \end{cases}; \qquad g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$g(1^-) = g(1^+) = \frac{1}{2}$, $\Longrightarrow g \in C^0(\mathbb{R})$;

$g'(1^-) = \frac{1}{2}$, $g'(1^+) = \frac{5}{2} \Longrightarrow g \notin C^1(\mathbb{R})$.

4.1) Ricerca dei punti fissi:

$g(x) = x,\ x < 1 : \frac{1}{2}x = x$, che ha soluzione $x = 0$.
Dunque $\boxed{\alpha = 0}$ è un punto fisso.

$g(x) = x,\ x \geq 1 : -\frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 2 = x$, che ha soluzione $x = 2$ (molteplicità 2).
Dunque $\boxed{\beta = 2}$ è un punto fisso.

4.2) Studio della convergenza al variare di x_0:

$x_0 < \alpha \rightarrow$: successione monotona crescente limitata superiormente da α:
$x_n \nearrow \alpha$;

$\alpha < x_0 < \beta \rightarrow$: successione monotona decrescente limitata inferiormente da α:
$x_n \searrow \alpha$;

$x_0 > \beta \rightarrow$: successione monotona decrescente limitata inferiormente da β:
$x_n \searrow \beta$;

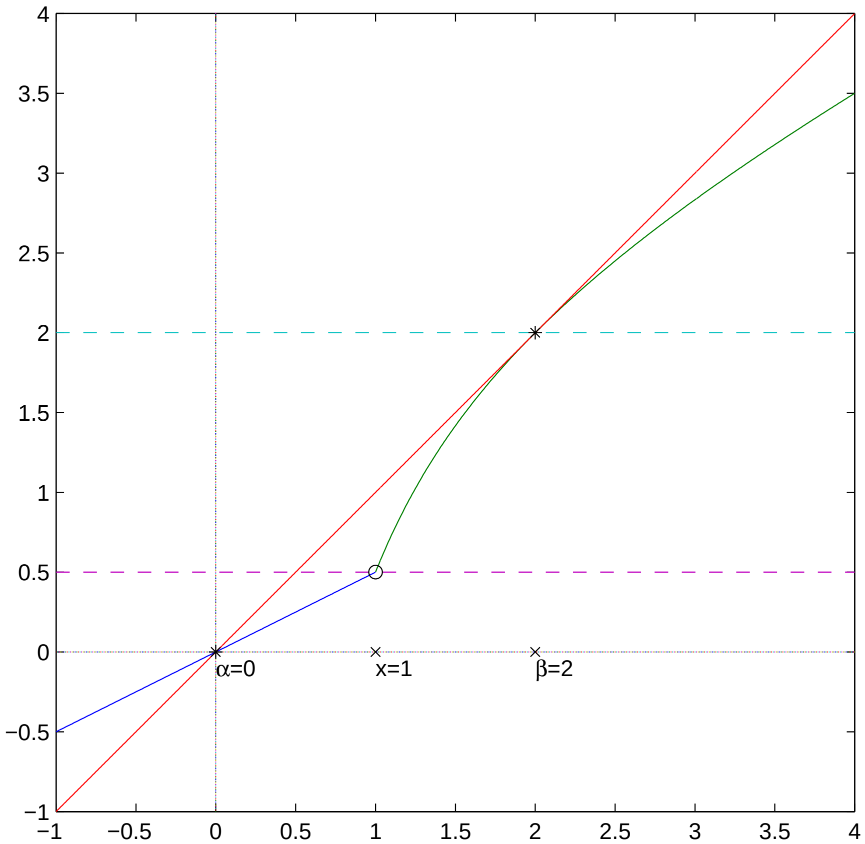

Figure 1: Grafico della funzione g.

4.3) Studio dell'ordine:

Punto fisso α: $g'(0) = \frac{1}{2}$, $\Longrightarrow$ ordine 1.

Punto fisso β: $g'(2^+) = 1$, con $0 < g'(x) < 1$ per $x > 1$.
Inoltre, per $x_0 > \beta$ si ha $x_n \searrow \beta$, e:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \beta}{x_n - \beta} = g'(\beta^+) \equiv g'(2^+) = 1 \neq 0 \implies \text{ordine 1.}$$

ESERCIZIO 5

Si ha $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $(x_1, y_1) = (1, 2)$, $(x_2, y_2) = (2, 4)$.

Il polinomio p_2 si può per esempio ottenere con il metodo delle differenze divise:

$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2},\ p_2(x) = a_0 + a_1 x + \dfrac{1}{2} x(x-1) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{x}{2} + 1.$

Per la maggiorazione dell'errore:

$$\forall x \in [0,2]: \quad |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{3!} |x(x-1)(x-2)| \max_{t \in [0,2]} |f^{(3)}(t)|,\ t \in [0,2].$$

In particolare, per $x \in [0, 2]$:

A) $|\omega(x)| = |x(x-1)(x-2)| \leq 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4,$

oppure, in modo più rigoroso si procede calcolando il massimo di $|\omega|$ sull'intervallo $[0, 2]$. Si ha:

B) $\omega'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \geq 0$, per $x \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, e $x \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, da cui

$$|\omega(x)| \leq \left|\omega\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \frac{2}{3\sqrt{3}},\ x \in [0,2].$$

Inoltre

$$f^{(3)}(t) = 2^t (\log 2)^3, \quad \max_{t \in [0,2]} |f^{(3)}(t)| = 2^2 (\log 2)^3 \approx 1.332$$

Concludendo si ha:

A) $|f(x) - p_2(x)| \leq \dfrac{1}{6}\, 4\, [2^2 (\log 2)^3] \approx 0.888.$

B) $|f(x) - p_2(x)| \leq \dfrac{1}{6} \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\, [2^2 (\log 2)^3] \approx 0.08545.$