1) Dati n punti (x_k, y_k), $k = 1, ..., n$ si determini la costante c in modo tale che $y = c$ sia l'equazione della retta che approssima i dati nel senso dei minimi quadrati discreti di grado zero.

Nel caso particolare $(x_k, y_k) = (k, 1)$, $k = 1, ..., n-1$ e $(x_n, y_n) = (n, n)$ si calcoli c in funzione di n e si scriva l'espressione della spline lineare $y = S_1(x)$ che interpola i dati.

Si calcoli infine l'espressione di $r(x) = S_1(x) - c$, $x \in [1, n]$ e

$$\lim_{n\to\infty} \max_{n-1\le x\le n} |r(x)|.$$

M1

20|06|2013

x_k	1	2	3	....	$n-1$	n
y_k	1	1	1		1	n

$$c = M(y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$c = M(y) = \frac{n-1+n}{n} = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

$$S_1(x) = \begin{cases} 1 & k \le x \le k+1 \quad k = 1, \dots, n-2 \\ (n-1)(x-n+1)+1 & n-1 \le x \le n \\ =(n-1)x - n^2 + 2n & \end{cases}$$

$$r(x) = \begin{cases} 1 - 2 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - 1 & 1 \le x \le n-1 \\ (n-1)x - n^2 + 2n - 2 + \frac{1}{n} & n-1 \le x \le n \end{cases}$$

$$\max |r(x)| = \max \{ |r(n-1)|, |r(n)| \} =$$

$$\max \{ (n-1)^2 - n^2 + 2n - 2 + \frac{1}{n} ; |(n-1)n - n^2 + 2n - 2 + \frac{1}{n}| \} =$$

$$\max \{ |\frac{1}{n} - 1| ; |n - 2 + \frac{1}{n}| \} = \max \{ \frac{n-1}{n} ; \frac{(n-1)^2}{n} \} = \frac{(n-1)^2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{n} = +\infty$$

2) Dato il metodo iterativo

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad g(x) = a^2x^3 - 3ax^2 + 3x, \quad a > 0,$$

si determinino le soluzioni dell'equazione $x = g(x)$ e si studi la convergenza del metodo iterativo al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$.

M1
20/06/2013

$x = a^2x^3 - 3ax^2 + 3x$

$a^2x^3 - 3ax^2 + 2x = 0$

$x(a^2x^2 - 3ax + 2) = 0 \quad x(ax-1)(ax-2) = 0$

$x = 0 \quad x = \frac{1}{a} \quad x = \frac{2}{a}$

Studio di $y = g(x)$

$g(x) = x(a^2x^2 - 3ax + 3) > 0 \quad x > 0$

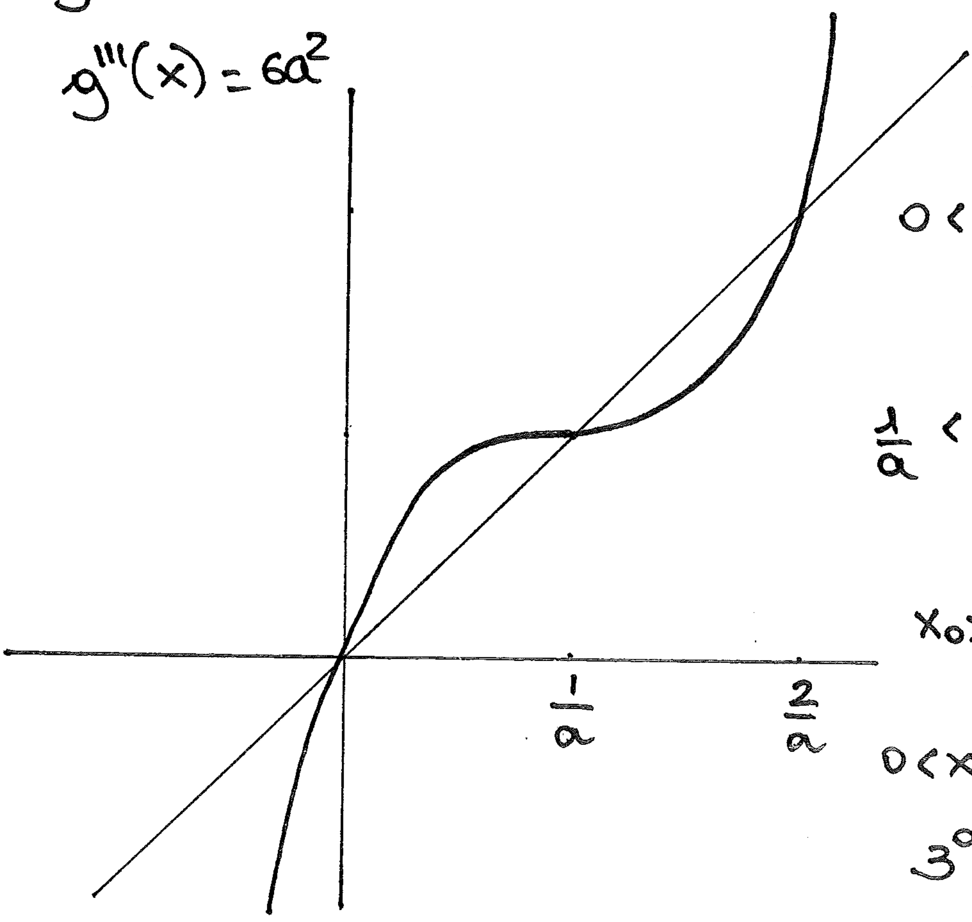
$\Delta = 9a^2 - 12a^2 < 0$

$g'(x) = 3a^2x^2 - 6ax + 3 = 3(a^2x^2 - 2ax + 1) = 3(ax-1)^2 \geq 0$

$x \neq \frac{1}{a}$; $g'(0) = 3$; $g'\left(\frac{2}{a}\right) = 3$; (NO cond. suff. $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{2}{a}$)

$g''(x) = 6a^2x - 6a = 6a(ax-1) > 0 \quad x > \frac{1}{a}$

$g'''(x) = 6a^2$



$x_0 < 0$ succ. mon. decr. ill. inf $x_n \searrow -\infty$

$0 < x_0 < \frac{1}{a}$ succ. mon. cresc. lim sup da $\frac{1}{a}$ $x_n \nearrow \frac{1}{a}$

$\frac{1}{a} < x_0 < \frac{2}{a}$ succ. mon. decr. lim inf da $\frac{1}{a}$ $x_n \searrow \frac{1}{a}$

$x_0 > \frac{2}{a}$ succ. mon. cresc. ill. sup. $x_n \nearrow +\infty$

$0 < x_0 < \frac{2}{a} \quad x_n \to \frac{1}{a}$

3° ordine

3) Determinare $h > 0$, ω_1 e ω_2 in modo tale che la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \omega_1 f(-h) + \omega_2 f(0) + \omega_1 f(h),$$

abbia grado di precisione massimo. Di che formula si tratta? Quanto vale il grado di precisione?

M1

20/06/2013

1) GP. 0 $\quad f(x) = 1$

$\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \qquad 2\omega_1 + \omega_2 = 2$

2) GP. 1 $\quad f(x) = x$

$\int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \qquad -h\omega_1 + h\omega_1 = 0 \quad \forall h, \forall \omega_i$

3) GP. 2 $\quad f(x) = x^2$

$\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3} \qquad 2\omega_1 h^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \omega_1 h^2 = \frac{1}{3}$

4) GP3 $\quad f(x) = x^3 \qquad \forall h, \forall \omega_i$

5) GP4 $\quad f(x) = x^4$

$\int_{-1}^{1} x^4\, dx = \frac{2}{5} \qquad 2\omega_1 h^4 = \frac{2}{5} \Rightarrow \omega_1 h^4 = \frac{1}{5}$

$$\begin{cases} 2\omega_1 + \omega_2 = 2 \\ \omega_1 h^2 = \frac{1}{3} \\ \omega_1 h^4 = \frac{1}{5} \end{cases} \qquad 3^a/2^a \qquad h^2 = \frac{3}{5} \qquad h = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$\omega_1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3} \Rightarrow \omega_1 = \frac{5}{9}$

$\omega_2 = 2 - 2 \cdot \frac{5}{9} = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$

E' la formula di Gauss-Legendre a 3 punti.

Ha grado di precisione $2 \cdot 3 - 1 = 5$.

4) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

e si trovi la sua inversa A^{-1}, imponendo elemento per elemento l'uguaglianza $AA^{-1} = I_4$, sapendo che $A^{-1}_{11} = A^{-1}_{44} = 1$ e che gli elementi della prima sottocolonna e dell'ultima sopracolonna sono nulli. Si calcoli quindi il numero di condizionamento in norma infinito della matrice A.
Si stabilisca infine se il metodi di Jacobi è convergente nel caso di sistema lineare con matrice A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ 0 & g & h & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a + 2c = 0$
$b + 2d = 0$
$c + e = 1$
$d + f = 0$
$2c + 4e = 0$
$2d + 4f = 1$
$-e + g = 0$
$-f + h = 0$

$e = -1$
$c = 2$

$d = -\frac{1}{2}$
$f = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $a = -4$, $b = 1$, $g = -1$, $h = \frac{1}{2}$

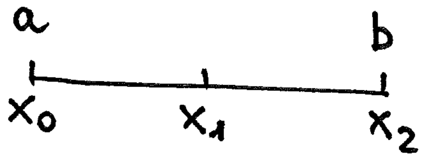
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$\|A\|_\infty = 6$ $\quad \|A^{-1}\|_\infty = 6$ $\quad K_\infty(A) = 36$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot \lambda (4\lambda^2 - 2) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 0 \qquad \lambda_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ md Jacobi converge.

5) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e siano assegnati i punti $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$, quante funzioni spline $S_2(x)$ quadratiche interpolanti nei nodi indicati esistono? Nel caso in cui si richieda l'ulteriore condizione di regolarità, $S_2 \in C^2([a, b])$, cioè S_2 continua con le sue derivata prima e seconda, esiste una spline quadratica interpolante?



$$S_2(x)\big|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_2 \qquad i = 1, 2$$

Numero incognite : $3 \times 2 = 6$

Numero condizioni:

3 condizioni di interpolazione $S_2(x_i) = y_i$

$i = 1, 2, 3$

$$S_2(x_1^-) = S_2(x_1^+)$$

$$S_2'(x_1^-) = S_2'(x_1^+) \qquad \text{TOT : 5 condizioni}$$

d.o.f. = 1 $\Rightarrow \exists\ \infty^1$ spline....

Condizione aggiuntiva

$$S_2''(x_1^-) = S_2''(x_1^+)$$

$$\Rightarrow S_2\big|_{[x_0, x_1]} \equiv S_2\big|_{[x_1, x_2]}$$