CALCOLO NUMERICO 1 (11 luglio 2013)

MILANO

1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

e stabilire per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.

$$K_f(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| \qquad C.E(f) \begin{cases} x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{x}}} \cdot \left(- \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \qquad C.E. (f') \quad 0 < x < 4$$

$$K_f(x) = \left| \frac{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{x}}}}{\sqrt{2-\sqrt{x}}} \right| = \frac{\sqrt{x}}{4} \cdot \frac{1}{2-\sqrt{x}} < 10$$

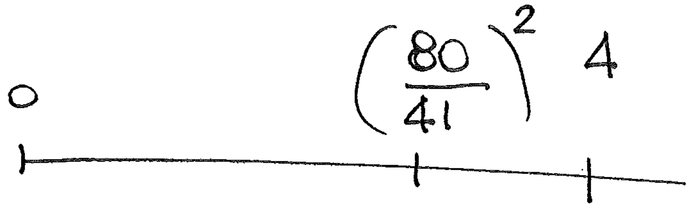
$$\sqrt{x} < 40 (2 - \sqrt{x})$$

$$\sqrt{x} < 80 - 40\sqrt{x}$$

$$41\sqrt{x} < 80$$

$$\sqrt{x} < \frac{80}{41}$$

$$0 < x < \left(\frac{80}{41}\right)^2$$



$$\| $$

$$\frac{6400}{1681} \approx 3.807$$

2) Studiare la convergenza e l' ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ per la ricerca dei punti fissi della funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 + (x-1)^4 & x < 2 \\ 2 + (x-2)^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

al variare di $x_0 \geq 0$.

MI 11-07-2013

C.E. $\mathbb{R}$

$g(x) = x \qquad 1 + (x-1)^4 = x \qquad (x-1)^4 = (x-1)$

$x - 1 = 0 \qquad x = 1 \qquad \alpha$

$x - 1 = 1 \qquad x = 2 \qquad \beta$

$2 + (x-2)^2 = x \qquad (x-2)^2 = x - 2$

$x - 2 = 0 \qquad x = 2$

$x - 2 = 1 \qquad x = 3 \qquad \gamma$

$g(2^+) = g(2^-) = 2$

$g(0) = 2$

$$g'(x) = \begin{cases} 4(x-1)^3 & x<2 \\ 2(x-2) & x \leq 2 \end{cases} \qquad g''(x) = \begin{cases} 12(x-1)^2 \\ 2 \end{cases} \qquad g'''(x) = \begin{cases} 24(x-1) \\ 0 \end{cases}$$

$$g^{IV}(x) = \begin{cases} 24 \\ 0 \end{cases} \qquad g^{V}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

		0		1		2	
g'	−		−	disc	−		+

$m(2;2)$

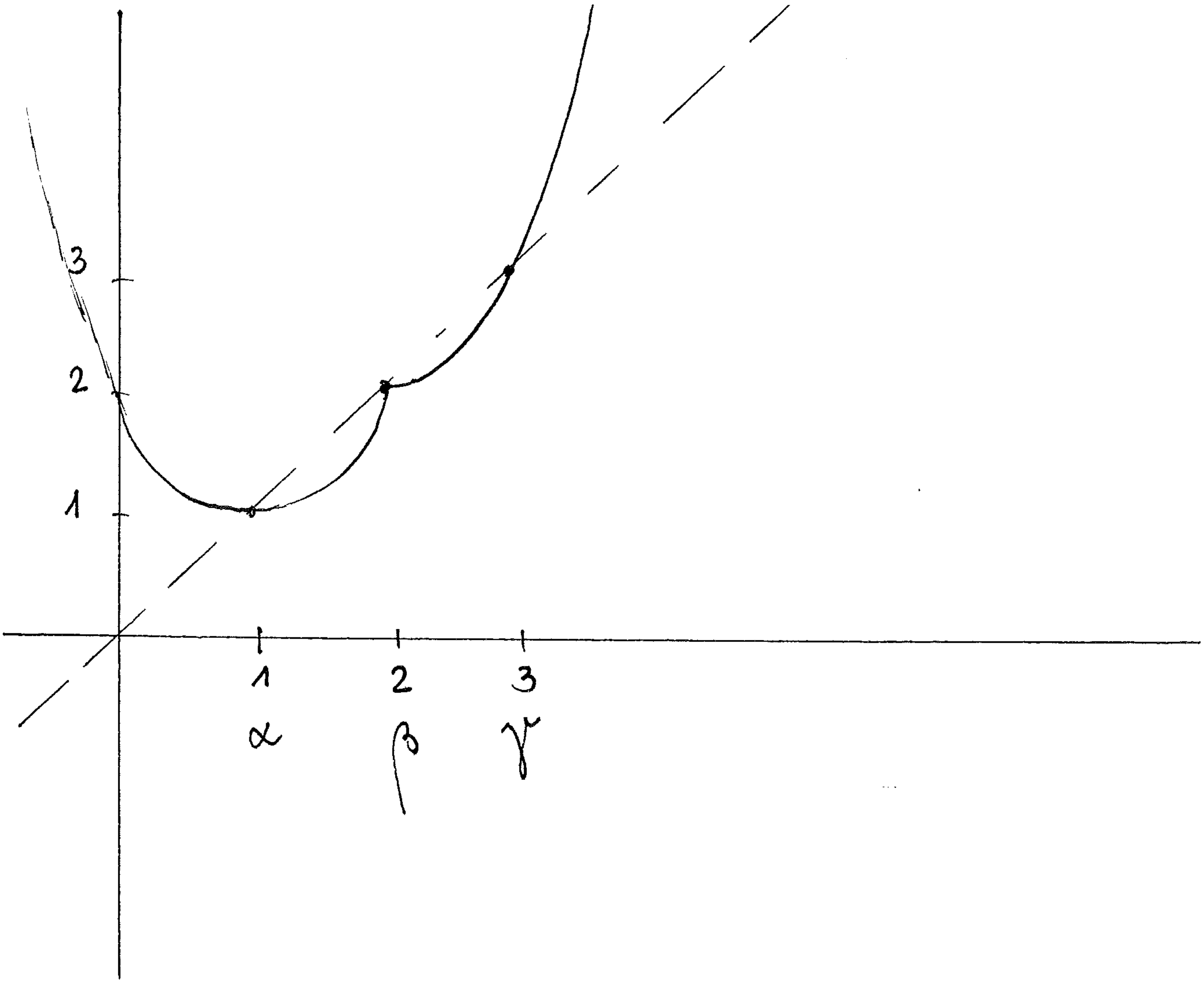
$g'(\alpha) = g'(1) = 0 \qquad g''(\alpha) = g''(1) = g'''(1) = 0 \qquad g^{IV}(1) = 24 \neq 0$

Conv. 4° ordine

$$g'(\beta) = \begin{cases} g'(2^-) = 4 \\ g'(2^+) = 0 \end{cases} \qquad g''(2^+) = 2 \neq 0$$

Conv 2° ordine a β per $\beta < x_0$

$g'(\gamma) = 2 > 1$ non si ha conv. a γ.



Studio della convergenza per $x_0 \geq 0$

1. $x_0 = 0 \quad x_1 = \beta \quad x_n = \beta \ \forall n \geq 1$
2. $0 < x_0 < \alpha \quad \alpha < x_1 < \beta$ Vedi caso 4
3. $x_0 = \alpha \quad x_1 = \alpha$ "$x_n = \alpha$" $\forall n \geq 1$
4. $\alpha < x_0 < \beta$ succ. mon. decr. lim. inf da α: $x_n \searrow \alpha$
5. $x_0 = \beta \quad x_1 = \beta \ldots$ "$x_n = \beta$" $\forall n \geq 1$
6. $\beta < x_0 < \gamma$ succ. mon. decr. lim inf da β: $x_n \searrow \beta$
7. $x_0 = \gamma \quad x_1 = \gamma \ldots$ "$x_n = \gamma$" $\forall n \geq 1$
8. $x_0 > \gamma$ succ. mon. cresc. ill. inf $\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$

3) Data $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ sia $p_{2n}(x)$ il polinomio di grado $2n$ che interpola f nei nodi $x_i=-1+i/n,\ i=0,...,2n$. Dimostrare che $\forall x\in[-1,1]$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}[f(x)-p_{2n}(x)]=0.$$

MI 11|07|2013

$$|f(x)-p_{2n}(x)|=\frac{|\omega(x)|}{(2n+1)!}\left|f^{(2n+1)}(t)\right|$$

$$|\omega(x)|=|(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{2n})|\leq\underbrace{2\cdot2\cdot\ldots\cdot2}_{2n+1}=2^{2n+1}$$

$x, x_i\in[-1,1]\quad\forall i$

$$f(t)=\sin\frac{t}{2}$$

$$f'(t)=\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\qquad f''(t)=-\frac{1}{2^2}\sin\frac{t}{2}\qquad f'''(t)=-\frac{1}{2^3}\cos\frac{t}{2}$$

$$\ldots\quad\left|f^{(2n+1)}(t)\right|\leq\frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$|f(x)-p_{2n}(x)|\leq\cancel{2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{\cancel{2^{2n+1}}}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$\forall x\in[-1,1]$

4) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 4 & 4 \\ 4 & \alpha & 4 \\ 4 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

MI

11.07.2013

4.1) Determinare per quali valori di α la matrice A è definita positiva.

4.2) Determinare per quali valori di α la matrice A è diagonalmente dominante.

4.3) Determinare per quali valori di α il metodo di Jacobi converge.

4.4) Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ il metodo di Gauss-Seidel converge.

4.1)
$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha^2 - 16 > 0 \\ \alpha(\alpha^2-16) - 4(4\alpha-16) + 4(16-4\alpha) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha < -4 \cup \alpha > 4 \\ \end{cases}$$

$$\alpha(\alpha-4)(\alpha+4) - 4 \cdot 4(\alpha-4) - 4 \cdot 4(\alpha-4) > 0$$

$$(\alpha-4)(\alpha^2+4\alpha-32) > 0$$

$$(\alpha-4)(\alpha+8)(\alpha-4) = (\alpha-4)^2(\alpha+8) > 0 \qquad \alpha \neq 4 \wedge \alpha > -8$$

$$\Longrightarrow A \text{ def. pos. } \alpha > 4$$

4.2)
$$\begin{cases} |\alpha| > 8 \\ \text{idem} \end{cases} \qquad \alpha < -8 \cup \alpha > 8$$

4.3)
$$\det \begin{bmatrix} \alpha\lambda & 4 & 4 \\ 4 & \alpha\lambda & 4 \\ 4 & 4 & \alpha\lambda \end{bmatrix} = (\alpha\lambda-4)^2(\alpha\lambda+8) = 0 \qquad \lambda = \frac{4}{\alpha} \quad \lambda = -\frac{8}{\alpha}$$

$$\rho(B_J) = \frac{8}{|\alpha|} < 1 \qquad |\alpha| > 8$$

4.4) $\alpha > 0$ + simmetria $\Longrightarrow$: GS converge $\Longleftrightarrow$ A è def. pos $\Updownarrow$ $\alpha > 4$