1) Trovare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione $f(x)=\sqrt{1-4\sqrt{x}}$ e stabilire per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x)<10$

(MILANO 10-7-2014)

$$f(x)=\sqrt{1-4\sqrt{x}}$$

C.E. $\begin{cases} x\geq 0 \\ 1-4\sqrt{x}\geq 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\geq 0 \\ x\leq \frac{1}{16} \end{cases}$ $\quad x\in\left[0,\frac{1}{16}\right]$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-4\sqrt{x}}}\cdot\left(-\frac{4}{2\sqrt{x}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-4\sqrt{x}}}$$

C.E. $x\in\left(0,\frac{1}{16}\right)$

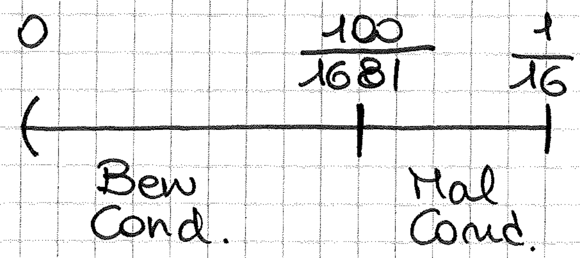
$$K_f(x)=\left|x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-4\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4\sqrt{x}}}\right|=\frac{\sqrt{x}}{1-4\sqrt{x}}$$

$x\in\left(0,\frac{1}{16}\right)$

$\frac{\sqrt{x}}{1-4\sqrt{x}}<10 \qquad \sqrt{x}<10-40\sqrt{x}$

$41\sqrt{x}<10 \qquad x<\frac{100}{41^2}=\frac{100}{1681}\approx$

$0.059488\ldots<\frac{1}{16}$



2) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \alpha f(-\alpha) + \beta f(0) + \alpha f(\alpha) \qquad \alpha \in (0,1]$$

2.1) Trovare α in modo tale che la f.q. abbia grado di precisione massimo

2.2) Quale è il grado di precisione della formula ottenuta?

(MILANO 10-7-2014)

1) $r=0 \qquad f(x)=1$

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \qquad \boxed{\alpha+\beta+\alpha=2}$$

2) $r=1 \qquad f(x)=x$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \qquad -\alpha^2+\alpha^2=0 \qquad \forall\alpha$$

N.B.

$$\int_{-1}^{1} x^{2n+1}\,dx = FQ \quad \forall n$$

(dispari => simmetria)

3) $r=2 \qquad f(x)=x^2$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \qquad \alpha^3+\alpha^3=\frac{2}{3} \qquad \boxed{\alpha^3=\frac{1}{3}}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ 2\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} + \beta = 2 \end{cases} \qquad \beta = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$$

Controllo del grado di precisione

$r=4 \qquad f(x)=x^4$

$$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5} \qquad \Rightarrow \quad G.P. = 3$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^4 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot 2 \neq \frac{2}{5}$$

3) Stimare il numero minimo di sottointervalli di uguale ampiezza in cui suddividere $[0,2\pi]$, affinché l'errore che si commette interpolando con una spline lineare $f(x) = x^2 + \cos x + \sin x$ sia $< 10^{-3}$ (MILANO 10-7-14)

$$f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x + \cos x \qquad x \in [0, 2\pi]$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - s_1(x)| \le \frac{1}{8} h^2 M$$

$$h = \frac{2\pi}{n} \qquad M = \max_{t\in[0,2\pi]} |f''(t)|$$

$$f'(t) = 2t + \cos t - \operatorname{sen} t$$

$$f''(t) = 2 - \operatorname{sen} t - \cos t = 2 - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)$$

$$= 2 - \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$|f''(t)| = 2 - \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\max_{t\in[0,2\pi]} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 \cdot (2 + \sqrt{2}) < 10^{-3}$$

$$\frac{1}{2}\cdot \pi^2 \cdot 10^3 \cdot (2 + \sqrt{2}) < n^2$$

$$n > \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) 1000\,\pi^2} \simeq 129.8\ldots \qquad \bar{n} = 130$$

4) Dato il sistema lineare $Ax=b$ con $A=\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 2 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

4.1) Determinare per quali α e solo per quelli A è diagonalmente dominante

4.2) Costruire la matrice di iterazione B_J del metodo di Jacobi

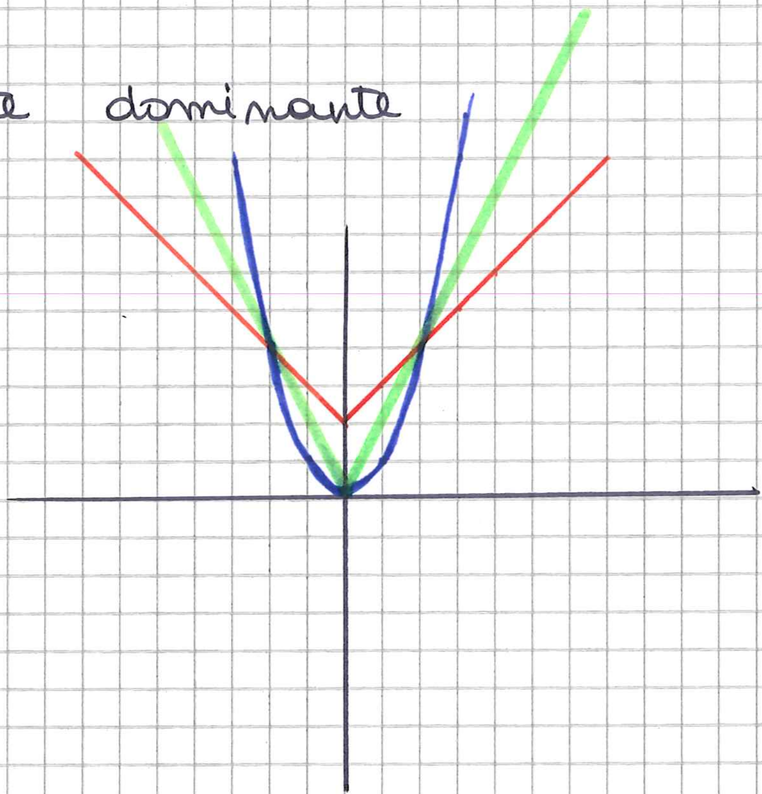
4.3) Calcolare $\|B_J\|_\infty$ e tracciare il grafico al variare di α

4.4) Trovare i valori di α per i quali $\|B_J\|_\infty < 1$

(MILANO 10-7-2014)

4.1) Diagonalmente dominante

$$\begin{cases} \alpha^2 > |\alpha| + 2 \\ \alpha^2 > 2|\alpha| \end{cases}$$



$|\alpha| > 2$

4.2) $$B_J = -\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} & \frac{2}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{2}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|B_J\|_\infty = \max\left\{ \frac{1}{|\alpha|} + \frac{2}{\alpha^2} ; \frac{2}{|\alpha|} \right\}$$

$$\frac{1}{|\alpha|} + \frac{2}{\alpha^2} < \frac{2}{|\alpha|} \Rightarrow \frac{2}{\alpha^2} < \frac{1}{|\alpha|} \Rightarrow |\alpha| > 2$$

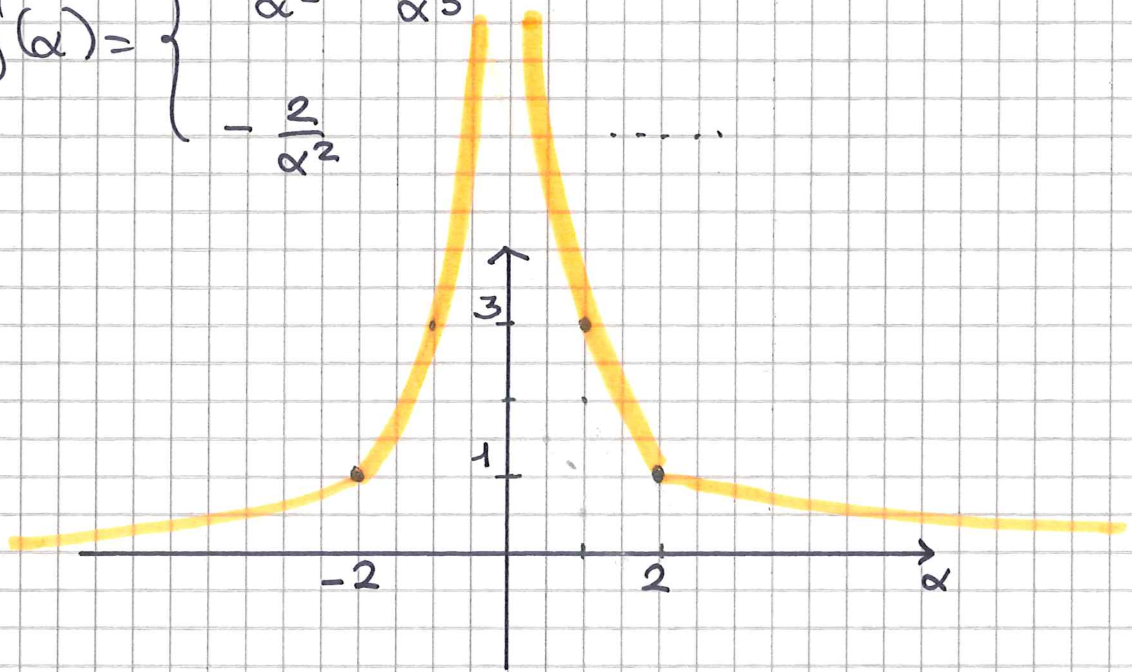
$$\|B_J\|_\infty = \begin{cases} \dfrac{1}{|\alpha|} + \dfrac{2}{\alpha^2} & |\alpha| \leq 2 \\ \dfrac{2}{|\alpha|} & |\alpha| > 2 \end{cases}$$

Per tracciare il grafico consideriamo

$$g(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{2}{\alpha^2} & 0 < \alpha \leq 2 \\ \dfrac{2}{\alpha} & \alpha > 2 \end{cases}$$

e per simmetria il caso $\alpha < 0$

$$g'(\alpha) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{4}{\alpha^3} & \dots\dots \\ -\dfrac{2}{\alpha^2} & \dots\dots \end{cases}$$



$\|B_J\|_\infty < 1$ per $|\alpha| > 2$

5) Discutere la convergenza del metodo di Newton per la ricerca di radici con molteplicità $p > 1$

VEDI Dispensa EZ
Capitolo: Equazioni non lineari:
metodi a un passo

(PAG. 41, 42)