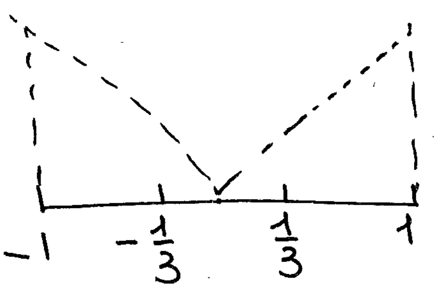
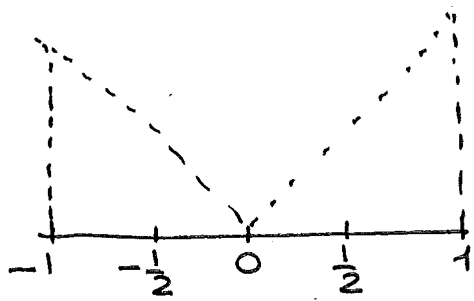
CALCOLO NUMERICO 1 (8 maggio 2013)

1) Per approssimare l'integrale definito $I = \int_{-1}^{1} |x| \mathrm{d}x$, si applichi la formula dei trapezi compositi prima con 3 e poi con 4 sottointervalli di uguale ampiezza. Si calcoli in entrambi i casi l'errore commesso e si commentino i risultati ottenuti. Successivamente si approssimi I con la formula di Gauss-Legendre a due punti e si calcoli l'errore commesso.

$$I = \int_{-1}^{1} |x| dx = 1 \qquad f(x) = |x|$$



I_3



I_4

$$I_3^T = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[f(-1) + 2f\left(-\frac{1}{3}\right) + 2f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1)\right] = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1\right] =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{3} = \frac{10}{9} = 1.1111\ldots$$

$$I_4^T = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\left[f(-1) + 2f\left(-\frac{1}{2}\right) + 2f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right] = \frac{1}{4}\cdot[1+1+1+1] =$$

$$1 = I_{esatto}$$

Infatti $f(x)$ è t.c. $f|_{[-1,-\frac{1}{2}]} \in \mathbb{P}_1$

$f|_{[-\frac{1}{2},0]} \in \mathbb{P}_1$

$\vdots$

Grado di precisione della formula dei trapezi è 1.

G.L.: $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2 = 1.1547 \implies err = 0.1547$

2) Studiare la convergenza e l' ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ per la ricerca dei punti fissi della funzione

$$g(x) = \begin{cases} \frac{24}{25} + \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 & x < 1 \\ 1 + (x-1)^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

al variare di $x_0 \geq 0$.

M1

8 maggio '13

n°2

$$g(x) = \begin{cases} \frac{24}{25} + \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 & x<1 \\ 1 + (x-1)^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

$V\left(\frac{4}{5}; \frac{24}{25}\right)$ $g(0) = \frac{8}{5}$

$\boxed{x_{n+1} = g(x_n) \quad x_0 \geq 0}$

$V(1; 1)$

$g(x) = x$ Ricerca dei punti fissi

- $\frac{24}{25} + \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 = x$ $\quad \frac{24}{25} + x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{16}{25} - x = 0$

$x^2 - \frac{13}{5}x + \frac{8}{5} = 0$ $\quad x_1 = \frac{8}{5} \notin (-\infty, 1)$

$x_2 = 1$

- $1 + (x-1)^2 = x$ $\quad x^2 - 2x + 2 - x = 0$ $\quad x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x=1)\,(x=2) \in [1, \infty)$

$$g'(x) = \begin{cases} 2\left(x - \frac{4}{5}\right) \\ 2(x-1) \end{cases}$$

$g'(1^-) = \frac{2}{5} < 1$

$g'(1) = 0$

$$g''(x) = \begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases}$$

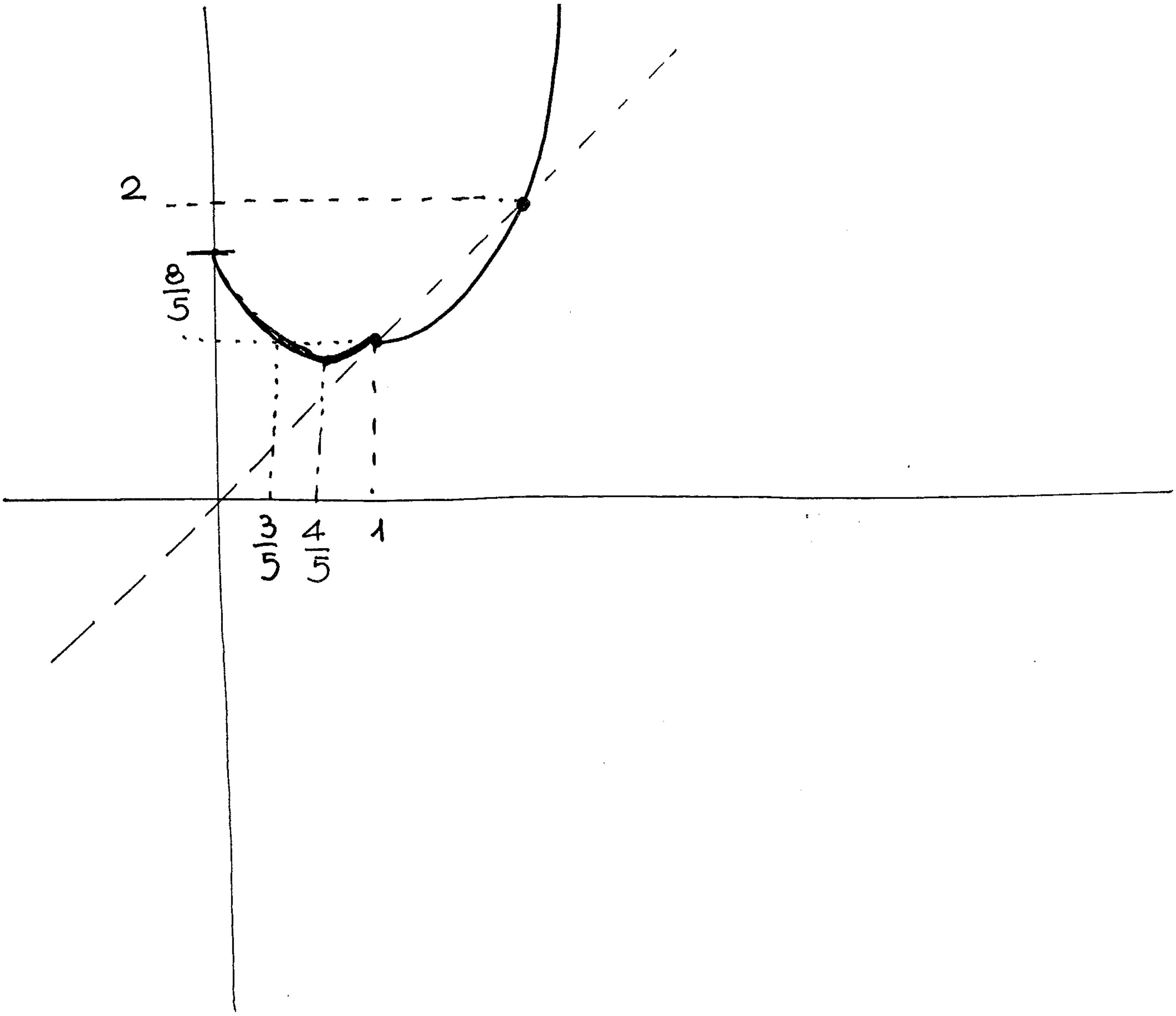
Inoltre

$$\frac{24}{25} + \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\frac{24}{25} + x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{16}{25} - 1 = 0$$

$x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{3}{5} = 0$ $\quad x = 1$

$x = \frac{3}{5}$



Studio della convergenza:

$0 \leq x_0 < \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad 1 < x_1 < 2$

$x_0 = \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad x_1 = 1 \quad$ "$x_n = 1$" $\forall n \geq 1$

$\frac{3}{5} < x_0 < 1$ succ. mon. cresc. lim. sup. da 1 $\quad x_n \nearrow 1$

$g'(1^-) = \frac{2}{5} \neq 0$ $\quad$ <u>1° ordine</u>

$x_0 = 1$ $\quad$ "$x_n = 1$" $\forall n$

$1 < x_0 < 2$ succ. mon. decr. lim. inf. da 1 $\quad x_n \searrow 1$

$g'(1^+) = 0 \quad g''(1^+) \neq 0$ $\quad$ <u>2° ordine</u>

$x_0 = 2$ $\quad$ "$x_n = 2$" $\forall n$

$x_0 > 2$ succ. mon. cresc. ill. sup. $\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$

3) Si consideri una curva parametrica nel piano (x, y) definita come segue,

$$x(t) = e^{-t^2+1}, \quad y(t) = 2\cos(\pi t)$$

con $t \in I = [0, 3]$. Approssimare con spline lineari sia $x(t)$ che $y(t)$ rispetto alla suddivisione $t_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Stimare l'errore

$$E = \max_{t \in I} |x(t) - S_x(t)| + \max_{t \in I} |y(t) - S_y(t)|$$

dove $S_x(t)$ e $S_y(t)$ sono le due spline lineari trovate precedentemente.

M1
8/5/13
n° 3

$$x(t) = e^{-t^2+1} \qquad y(t) = 2\cos(\pi t) \qquad t \in I = [0,3]$$

0 1 2 3 $\qquad h = 1$

$$\max_{t\in I} |x(t) - S_x(t)| \le \frac{h^2}{8} \underbrace{\max_{t \in I} |x''(t)|}_{M} = \frac{h^2 M}{8}$$

$$\max_{t\in I} |y(t) - S_y(t)| \le \frac{h^2}{8} \underbrace{\max_{t \in I} |y''(t)|}_{N} = \frac{h^2 N}{8}$$

$$M: \quad x'(t) = -2t e^{-t^2+1} \qquad x''(t) = -2\left[e^{-t^2+1} + t(-2t)e^{-t^2+1}\right] =$$

$$-2e^{-t^2+1}\left[1 - 2t^2\right] = (2t^2 - 1)\, e^{-t^2+1} \, 2$$

$$M \le 17e \cdot 2$$

$$N: \quad y'(t) = -2\pi \sin \pi t \qquad y''(t) = -2\pi^2 \cos \pi t$$

$$N \le 2\pi^2$$

$$E \le \frac{1}{4}\left(17e + \pi^2\right)$$

Cenni sulla costruzione

	0	1	2	3
$x(i)$	e	1	e^{-3}	e^{-8}
$y(i)$	2	-2	2	-2

$$S_x^{(1)}(t) = \begin{cases} \frac{1-e}{1-0}(t-0)+e & t\in[0,1) \\ \frac{e^{-3}-1}{2-1}(t-1)+1 & t\in[1,2) \\ \frac{e^{-8}-e^{-3}}{3-2}(t-2)+e^{-3} & t\in[2,3] \quad \ldots\ldots \end{cases}$$

$$S_y^{(1)}(t) = \begin{cases} \frac{-2-2}{1-0}(t-0)+2 & t\in[0,1) \\ \frac{2-(-2)}{2-1}(t-1)+(-2) & t\in[1,2)\ldots. \\ \frac{-2-2}{3-2}(t-2)+(2) & t\in[2,3]\ldots. \end{cases}$$

4) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a & a \\ a & 4 & a \\ a & a & 4 \end{pmatrix},$$

ed $a \in \mathbb{R}$.

- Determinare per quali valori di a la matrice A è definita positiva.
- Discutere al variare del parametro a la convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel.

HI

8|5|2013

- $\begin{pmatrix} 4 & a & a \\ a & 4 & a \\ a & a & 4 \end{pmatrix}$ $\det A = 4(16-a^2) - a(4a-a^2) + a(a^2-4a) =$

$64 - 4a^2 - 4a^2 + a^3 + a^3 - 4a^2 = 2a^3 - 12a^2 + 64 =$

$2(a^3 - 6a^2 + 32) = 2(a+2)(a-4)^2$ $\quad a \neq -2$, $a \neq 4$

$\begin{cases} 4 > 0 \\ 16 - a^2 > 0 \\ \det A > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \forall a \\ -4 < a < 4 \\ a > -2 \wedge a \neq 4 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ A def pos $\Longleftrightarrow$ $a \in (-2, 4)$

- $\begin{vmatrix} 4\lambda & a & a \\ a & 4\lambda & a \\ a & a & 4\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda(16\lambda^2 - a^2) - a(4a\lambda - a^2) + a(a^2 - 4a\lambda) =$

$= 64\lambda^3 - 4a^2\lambda - 4a^2\lambda + a^3 + a^3 - 4a^2\lambda =$

$= 64\lambda^3 - 12a^2\lambda + 2a^3 = 0 \quad 32\lambda^3 - 6a^2\lambda + a^3 = 0$

$\lambda = \frac{1}{4}a \quad \lambda = -\frac{1}{2}a \quad \rho(B_J) = \frac{|a|}{2} < 1$

$\Longleftrightarrow |a| < 2$

- Per dimostrare la convergenza del metodo di G.S. si utilizza la proprietà:

A simm, $a_{ii} > 0$. Allora GS converge $\Longleftrightarrow$ A def. pos.

$\underbrace{\text{A simm}, a_{ii}>0}_{\text{Vero}, \ a_{ii} = 4}$ $\quad \Downarrow \quad -2 < a < 4$

5) Discutere (esistenza, unicità, accuratezza,...) il seguente problema di interpolazione. Assegnati i valori $a < b$, y_a, y_b, z_a, z_b, determinare un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che

$$P(a) = y_a,\ P(b) = y_b,\ P'(a) = z_a,\ P'(b) = z_b.$$

MI

8|5|2013

$$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad P'(x) = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

$$a_3 a^3 + a_2 a^2 + a_1 a + a_0 = y_a$$
$$a_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = y_b$$
$$3a_3 a^2 + 2a_2 a + a_1 = z_a$$
$$3a_3 b^2 + 2a_2 b + a_1 = z_b$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ 3a^2 & 2a & 1 & 0 \\ 3b^2 & 2b & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ z_a \\ z_b \end{bmatrix}$$

$\det A \neq 0$ $(\exists!)$

$$-\begin{vmatrix} b^3 & b^2 & b \\ 3a^2 & 2a & 1 \\ 3b^2 & 2b & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a \\ 3a^2 & 2a & 1 \\ 3b^2 & 2b & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\left[b^3(2a-2b) - 3a^2(b^2-2b^2) + 3b^2(b^2-2ab)\right] +$$

$$a^3(2a-2b) - 3a^2(a^2-2ab) + 3b^2(a^2-2a^2) =$$

$$(2a-2b)(a^3-b^3) + 3a^2(-b^2-a^2+2ab) + 3b^2(-b^2+2ab-a^2) =$$

$$2(a-b)^2(a^2+ab+b^2) - (a-b)^2(3a^2+3b^2) =$$

$$(a-b)^2(2a^2+2ab+2b^2-3a^2-3b^2) =$$

$$(a-b)^2(-a^2+2ab-b^2) = -(a-b)^4 \neq 0$$

$$a \neq b$$

Per l'accuratezza: si veda teoria interpolazione Hermite.