CALCOLO NUMERICO 1 (8 Maggio 2014)

MILANO

1) Trovare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^3 - 1},$$

e stabilire per quali $x > 1$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 100$.

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^3-1} \qquad \boxed{(x>1)}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{(x^3-1)^2}$$

$$K_f(x) = \left| \frac{x \cdot \frac{-3x^2}{(x^3-1)^2}}{\frac{x^3-1+1}{x^3-1}} \right| = \frac{3x^3}{(x^3-1)^2} \cdot \frac{x^3-1}{x^3} = \frac{3}{x^3-1}$$

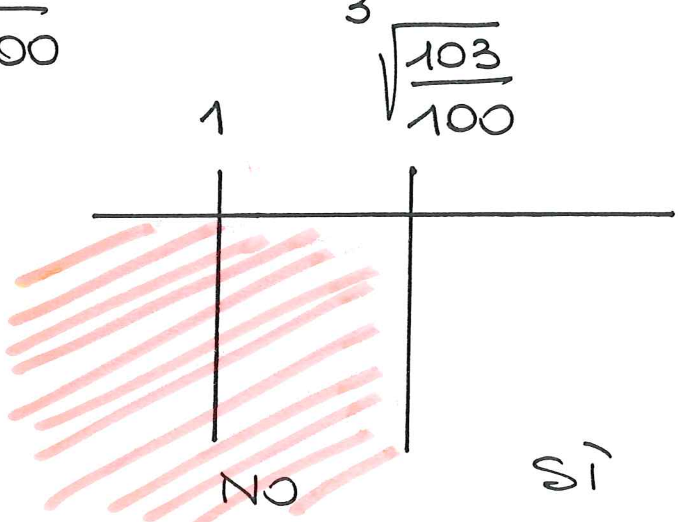
$$\frac{3}{x^3-1} < 100$$

$$\frac{3-100x^3+100}{x^3-1} < 0 \qquad \frac{100x^3-103}{x^3-1} > 0$$

$$x > \sqrt[3]{\frac{103}{100}}$$

$$(D>0 \quad \forall x>1)$$

B. Cond. $\quad x > \sqrt[3]{\frac{103}{100}}$



2) Data la funzione $f(x) = x^3 - (k+1)x^2 + k$, $k > 0$:

2.1) per quali k l'equazione $f(x) = 0$ ammette come soluzione $\alpha = 1$?

2.2) Studiare il numero e la molteplicità delle soluzioni reali dell'equazione $f(x) = 0$.

2.3) Posto $k = 1$ si dimostri che il metodo di Newton converge alla radice $\beta > 1$ per ogni scelta del valore iniziale $x_0 \in [\frac{3}{2}, 2]$.

Milano

8-5-2014

2.1) $f(x) = x^3 - (k+1)x^2 + k$ $\boxed{k>0}$

$f(1) = 1 - (k+1) + k = 1 - k - 1 + k = 0 \quad \forall k$

2.2) Poiché $\forall k$ si ha che $\alpha = 1$ è soluzione

$\Downarrow$

	1	$-k-1$	0	k
1		1	$-k$	$-k$
	1	$-k$	$-k$	0

$f(x) = (x-1)(x^2 - kx - k)$

$\Delta = k^2 + 4k$

- $\Delta < 0$ $\quad -4 < k < 0$ $\quad \Rightarrow$ 1 soluzione reale $\alpha = 1$
  2 soluzioni $\in \mathbb{C}$
- $\Delta = 0$ $\quad k = -4 \vee k = 0$ $\quad$ 2 soluz. $\mathbb{R}$ coincidenti
  1 sol. reale $\alpha = 1$

$\Rightarrow$ Poiché per ipotesi $k > 0$ si ha sempre $\Delta > 0$

Inoltre, sostituendo $x = 1$ nel Trinomio $x^2 - kx - k$ si osserva che $1 - k - k = 0$ $\quad k = \frac{1}{2}$

Dunque se $K = \frac{1}{2}$

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -3x^2 & & +1 & x^2-2x+1 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +4x^2 & -2x & & 2x+1 \\ \cline{1-4}
 & x^2 & -2x & +1 & \\
 & & // & &
\end{array}$$

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(2x+1)$$

Conclusione

$K > 0 \wedge K \neq \frac{1}{2}$ — 3 soluzioni reali e distinte di cui una soluzione è $\alpha = 1$

$K = \frac{1}{2}$ — 2 soluzioni coincidenti $\alpha_{1,2} = 1$ + 1 soluzione $\alpha_3 = -\frac{1}{2}$

$k=1$

$$f(x)=x^3-2x^2+1=(x-1)(x^2-x-1)=0$$

$$x_1=1 \qquad x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}= \begin{cases} \approx -0.618 \\ \approx 1.618 \end{cases} \qquad \beta \in I=\left[\frac{3}{2};2\right]$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{8}-\frac{9}{2}+1=\frac{-1}{8}=-\frac{1}{8}<0$$

$$f(2)=1>0$$

- $f'(x)=3x^2-4x>0 \qquad x\in I$
- $f''(x)=6x-4>0 \qquad x\in I$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{4}-6=\frac{3}{4} \qquad f'(2)=4$$

$$\left|\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\right|=\frac{1}{6}<\frac{1}{2} \qquad \left|\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{2}$$

m d N conv a $\beta\in\left(\frac{3}{2},2\right)$ $\forall x_0\in\left[\frac{3}{2};2\right]$.

3) Costruire il polinomio dei minimi quadrati discreti $p_1 \in \mathbb{P}_1$ relativo ai dati $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2$, dove:

$$x_0 = -\frac{1}{\alpha},\ x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{\alpha},\ (\alpha > 0),\quad f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

e calcolare l'errore globale commesso $E = \sum_{i=0}^{2}[f(x_i) - p_1(x_i)]^2$.

Milano

8.5.2014

x_i	$-\frac{1}{\alpha}$	0	$\frac{1}{\alpha}$
y_i	$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}$	1	$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}$

$$f\left(\pm\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}$$

				Σ
x_i	$-\frac{1}{\alpha}$	0	$\frac{1}{\alpha}$	0
y_i	$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}$	1	$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}$	$\frac{3\alpha^2+1}{\alpha^2+1}$
x_i^2	$\frac{1}{\alpha^2}$	0	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{2}{\alpha^2}$
$x_i y_i$	$-\frac{\alpha}{\alpha^2+1}$	0	$\frac{\alpha}{\alpha^2+1}$	0

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\alpha^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\alpha^2+1}{\alpha^2+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_0^* = \frac{3\alpha^2+1}{3(\alpha^2+1)}$$

$$c_1^* = 0$$

$$p^* = \frac{3\alpha^2+1}{3(\alpha^2+1)}$$

$$E = \left[\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} - \frac{3\alpha^2+1}{3(\alpha^2+1)}\right]^2 \cdot 2 + \left[1 - \frac{3\alpha^2+1}{3(\alpha^2+1)}\right]^2 =$$

$$2\left[\frac{\cancel{3\alpha^2}\,\cancel{-3\alpha^2} - 1}{3(\alpha^2+1)}\right]^2 + \left[\frac{\cancel{3\alpha^2} + 3\,\cancel{-3\alpha^2} - 1}{3(\alpha^2+1)}\right]^2 =$$

$$\frac{6}{9(\alpha^2+1)^2} =$$

$$\frac{2}{3}\frac{1}{(1+\alpha^2)^2}$$

4) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

Milano

8.5.2014

Si consideri poi il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \frac{1}{m}A)\mathbf{x}^{(k)} + \frac{\mathbf{b}}{m}, \quad m > 0.$$

4.1) Senza costruire il polinomio caratteristico della matrice di iterazione associata al metodo iterativo, fornire una condizione necessaria e sufficiente su m affinchè il metodo iterativo risulti convergente (si consideri la relazione tra autovalori di A e gli autovalori della matrice di iterazione).

4.2) Trovare il valore ottimale m^*, cioè il valore di m per cui il raggio spettrale della matrice di iterazione associata al metodo iterativo sia minimo.

Calcolo degli autovalori di A

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & -4 \\ 0 & 8 & 9-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\left[(-3-\lambda)(9-\lambda)+32\right] =$$

$$(2-\lambda)(-27-9\lambda+3\lambda+\lambda^2+32) = (2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5) =$$

$$(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5) = 0$$

$\lambda = 1$

$\lambda = 2$

$\lambda = 5$

$$x^{(k+1)} = \left(I - \frac{1}{m}A\right)x^{(k)} + \frac{b}{m}$$

$\boxed{m > 0}$

$\downarrow k \to \infty \qquad \downarrow$

$$x = \left(I - \frac{1}{m}A\right)x + \frac{b}{m}$$

$$x = x - \frac{1}{m}Ax + \frac{b}{m}$$

$$\frac{1}{m}(Ax - b) = 0$$

$$B_m = I - \frac{1}{m} A$$ matrice di iterazione

Calcolo autovalori per B_m $\left(\mu \in \sigma(B_m) \right)$

$$B_m x = \mu x$$

$$\left(I - \frac{1}{m} A \right) x = \mu x$$

$$x - \frac{1}{m} A x = \mu x$$

$$\frac{1}{m} A x = x - \mu x$$

$$A x = \underbrace{m(1-\mu)}_{\lambda} x$$

$$m(1-\mu) = \lambda$$

$$m - m\mu = \lambda$$

$$m\mu = m - \lambda$$

$$\mu = 1 - \frac{\lambda}{m}$$

$\lambda = 1$ $\quad \mu = 1 - \frac{1}{m}$

$\lambda = 2$ $\quad \mu = 1 - \frac{2}{m}$

$\lambda = 5$ $\quad \mu = 1 - \frac{5}{m}$

Convergenza : $|\mu| < 1$ $[\rho(B_m) < 1]$

$\left|1 - \frac{1}{m}\right| < 1$ $\quad 1 - \frac{1}{m} < 1 \wedge 1 - \frac{1}{m} > -1 ; \; (m > 0) \wedge m > \frac{1}{2}$

$\left|1 - \frac{2}{m}\right| < 1$ $\quad 1 - \frac{2}{m} < 1 \wedge 1 - \frac{2}{m} > -1 ; \; (m > 0) \wedge m > 1$

$\left|1 - \frac{5}{m}\right| < 1$ $\quad 1 - \frac{5}{m} < 1 \wedge 1 - \frac{5}{m} > -1 ; \; (m > 0) \wedge m > \frac{5}{2}$

Condizione per convergenza nec. suff: $m > \frac{5}{2}$

(In particolare:

$$\rho(B_m) = \max\left\{\left|1 - \frac{1}{m}\right| ; \left|1 - \frac{2}{m}\right| ; \left|1 - \frac{5}{m}\right|\right\}$$

Inoltre

$$\left|1 - \frac{1}{m}\right| = \begin{cases} 1 - \frac{1}{m} & m > 1 \\ \frac{1}{m} - 1 & 0 < m < 1 \end{cases}$$

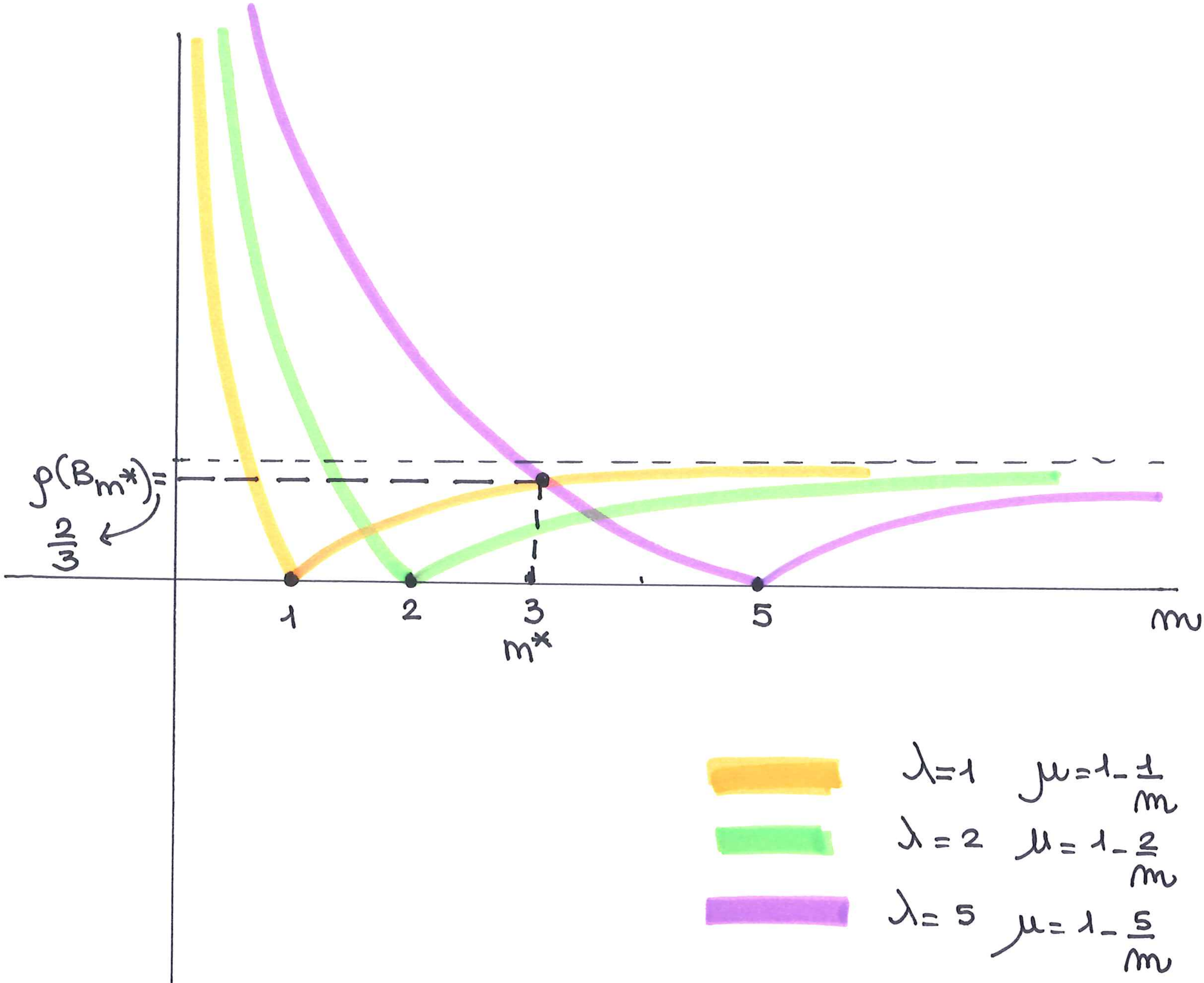
$$\left|1 - \frac{2}{m}\right| = \begin{cases} 1 - \frac{2}{m} & m > 2 \\ \frac{2}{m} - 1 & 0 < m < 2 \end{cases}$$

$$\left|1 - \frac{5}{m}\right| = \begin{cases} 1 - \frac{5}{m} & m > 5 \\ \frac{5}{m} - 1 & 0 < m < 5 \end{cases}$$

$1 - \frac{1}{m} > 1 - \frac{2}{m} \quad \frac{2}{m} > \frac{1}{m}$

$1 - \frac{2}{m} > 1 - \frac{5}{m} \quad \frac{5}{m} > \frac{2}{m}$

$\Longrightarrow \frac{1}{m} - 1 < \frac{2}{m} - 1 < \frac{5}{m} - 1$



$$\rho(B_m) = \begin{cases} \frac{5}{m} - 1 & m < m^* \\ 1 - \frac{1}{m} & m > m^* \end{cases}$$

$$m^* : \quad \frac{5}{m} - 1 = 1 - \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{6}{m} = 2 \qquad m^* = 3$$

$$\rho(B_{m^*}) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} = \left[1 - \frac{1}{3}\right]$$