CALCOLO NUMERICO 1 (19 Settembre 2013)

MILANO

1) Assegnata la funzione $f(x) = x^2 - x - 2$ ed i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = h$, con $h \in [0, 2]$, determinare il polinomio $p_1(x)$ che la interpola nei nodi assegnati. Successivamente scrivere l'espressione della funzione

$$r(h) = \max_{x \in [0,2]} |f(x) - p_1(x)|$$

al variare di h e calcolare il valore di h che la rende minima.

x_i	0	h
f_i	-2	h^2-h-2

$0 \quad -2 \to a_0$

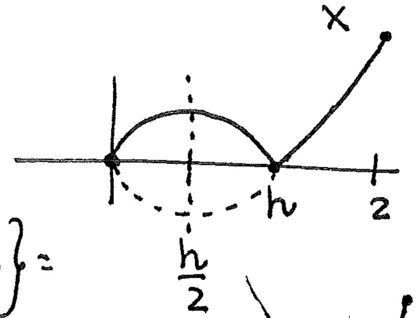
$$f_{01} = \frac{h^2-h-2+2}{h} = h-1 \to a_1$$

$h \quad h^2-h-2$

$p_1(x) = -2 + (h-1)x$

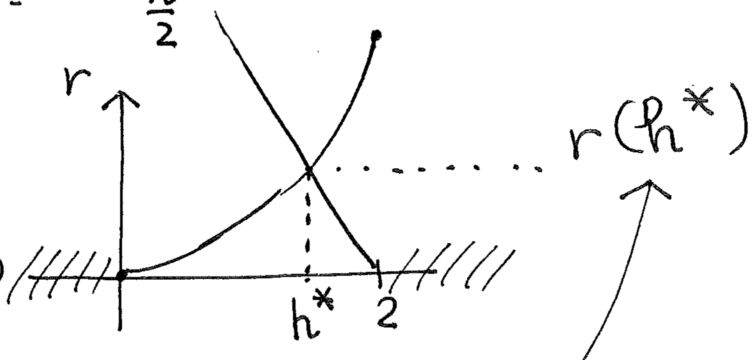
$$r(h) = \max_{0 \le x \le 2} |x^2 - x - 2 - [-2 + (h-1)x]| = \max |x^2 \cancel{-x} \cancel{-2} \cancel{+2} - hx \cancel{+x}|$$

$$= \max_{x \in [0,2]} |x^2 - hx| =$$



$$= \max \left\{ \left| \left(\frac{h}{2}\right)^2 - h\left(\frac{h}{2}\right) \right| ; \ |2^2 - 2h| \right\} =$$

$$= \max \left\{ \frac{h^2}{4}, \ 2(2-h) \right\}$$



$h^*: \quad \frac{h^2}{4} = 4 - 2h \qquad h^2 + 8h - 16 = 0$

$$h^* = \begin{cases} -4 - 4\sqrt{2} \notin [0,2] \\ -4 + 4\sqrt{2} \in [0,2] \end{cases}$$

$r(h^*) = 2(2 + 4 - 4\sqrt{2}) = 12 - 8\sqrt{2}$

2) Si vuole approssimare l'integrale definito $I = \int_1^6 2\log x dx$ con la formula dei trapezi compositi (I_T), suddividendo l'intervallo $[1,6]$ in 10 sottointervalli di uguale ampiezza. Studiare l'errore $|I - I_T|$ utilizzando sia la formula classica che la formula asintotica. Non è richiesto il calcolo di I_T.

MI

19|9|2013

$$H = \frac{6-1}{10} = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = 2\log t \qquad f'(t) = \frac{2}{t} \qquad f''(t) = -\frac{2}{t^2}$$

STIMA CLASSICA

$$I - I_T \approx -\frac{(b-a)}{12} H^2 f''(t)$$

$$\approx -\frac{1}{12} \cdot 5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 f''(t) = -\frac{5}{48} f''(t)$$

$$|I - I_T| \leq \frac{5}{48} \max_{1 \leq t \leq 6} |f''(t)| = \frac{5}{48} \cdot 2 = \frac{5}{24} \approx 0.2083$$

STIMA ASINTOTICA

$$I - I_T \approx \frac{H^2}{12}\left(f'(a) - f'(b)\right)$$

$$\approx \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(2 - \frac{2}{6}\right) = \frac{1}{48} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{144} \approx$$

$$0.0347\ldots$$

3) Studiare la convergenza e l'ordine dei metodi iterativi:

MILANO

19/9/2013

3.1) $x_{n+1} = (1-\beta)x_n + 1$

3.1) $x_{n+1} = x_n \left[3(1-\beta x_n) + \beta^2 x_n^2\right]$

per il calcolo di $1/\beta$, con $\beta \in (0,1)$ e $x_0 \geq 0$.

3.1) $x = (1-\beta)x + 1 \qquad \cancel{x} = \cancel{x} - \beta x + 1 \qquad x = \frac{1}{\beta}$

$g(x) = (1-\beta)x + 1 \qquad g'(x) = 1 - \beta$

$\beta \in (0,1) \qquad 1-\beta \in (0,1) \Rightarrow$ C. SUFFICIENTE

ordine 1 $\left(g'\left(\frac{1}{\beta}\right) = 1 - \beta \neq 0\right)$

3.2) $x = 3x - 3\beta x^2 + \beta^2 x^3 \qquad g'(x) = 3\beta^2 x^2 - 6\beta x + 3 = 3(\beta x - 1)^2$

$\beta^2 x^3 - 3\beta x^2 + 2x = 0$

$x(\beta^2 x^2 - 3\beta x + 2) = 0$

$x = 0$

$\beta x = 1 \qquad x = 1/\beta$

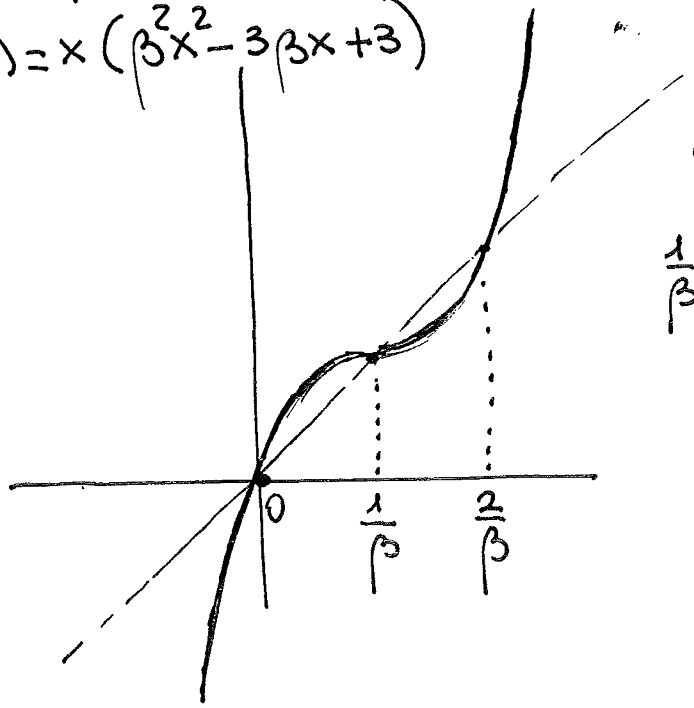
$\beta x = 2 \qquad x = 2/\beta$

- $g'\left(\frac{1}{\beta}\right) = 0 \qquad g''(x) = 6(\beta x - 1)\cdot\beta \qquad g''\left(\frac{1}{\beta}\right) = 0$

$g'''\left(\frac{1}{\beta}\right) \neq 0 \Rightarrow 3^\circ$ ordine

$\left[\begin{array}{l} g'(0) = 3 > 1 \\ g'\left(\frac{2}{\beta}\right) = 3 > 1 \end{array}\right. \Rightarrow$ corollario .... diverge o converge ad altro p. fisso

$g(x) = x(\beta^2 x^2 - 3\beta x + 3)$



$x_0 = 0 \quad x_n = 0 \ldots$

$0 < x_0 < \frac{1}{\beta} \quad x_n \nearrow \frac{1}{\beta}$

$\frac{1}{\beta} < x_0 < \frac{2}{\beta} \quad x_n \searrow \frac{1}{\beta}$

$x_0 > \frac{2}{\beta} \quad x_n \nearrow +\infty$

4) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

MILANO

19/9/2013

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2\alpha & 0 & -\alpha & -1 \\ 1 & 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 1 & -\alpha & 0 & 2\alpha & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

4.1) Determinare per quali valori di α la matrice A è non singolare.

4.2) Determinare per quali valori di α la matrice A è diagonalmente dominante.

4.3) Determinare per quali valori di α il metodo di Gauss-Seidel converge.

4.1) (3R,3C)

$$\det A = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2\alpha & -\alpha & -1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \left\{ \alpha \begin{vmatrix} 2\alpha & -\alpha & -1 \\ -\alpha & 2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2\alpha & -\alpha \\ 1 & -\alpha & 2\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \alpha \left\{ \alpha \left[\alpha \left(4\alpha^2 - \alpha^2 \right) \right] - \left(4\alpha^2 - \alpha^2 \right) \right\} = \alpha \left(\alpha^2 - 1 \right) \left(3\alpha^2 \right) =$$

$$3\alpha^3 \left(\alpha^2 - 1 \right) \neq 0 \qquad \alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -1$$

4.2)

$$\begin{cases} |\alpha| > 1 \\ 2|\alpha| > |\alpha| + 2 \\ |\alpha| > 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} |\alpha| > 1 \\ |\alpha| > 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow |\alpha| > 2$$

4.3)

$$\det \begin{vmatrix} \alpha\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 2\alpha\lambda & 0 & -\alpha & -1 \\ \lambda & 0 & \alpha\lambda & 0 & 1 \\ \lambda & -\alpha\lambda & 0 & 2\alpha\lambda & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & \alpha\lambda \end{vmatrix} = \alpha\lambda \begin{vmatrix} \alpha\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & 2\alpha\lambda & -\alpha & -1 \\ \lambda & -\alpha\lambda & 2\alpha\lambda & 1 \\ \lambda & 0 & 0 & \alpha\lambda \end{vmatrix}$$

$$\alpha\lambda \left\{ \alpha\lambda \left[\alpha\lambda \left(4\alpha^2\lambda^2 - \alpha^2\lambda \right) \right] - \lambda \left(4\alpha^2\lambda^2 - \alpha^2\lambda \right) \right\} =$$

$$\alpha\lambda \left(4\alpha^2\lambda^2 - \alpha^2\lambda \right) \left(\alpha^2\lambda^2 - \lambda \right) = \alpha\lambda \cdot \alpha^2\lambda \left(4\lambda - 1 \right) \cdot \lambda \left(\alpha^2\lambda - 1 \right):$$

$$\alpha^3\lambda^3 \left(4\lambda - 1 \right) \left(\alpha^2\lambda - 1 \right) = 0$$

$\lambda = 0$

$\lambda = \frac{1}{4}$

$\lambda = \frac{1}{\alpha^2} < 1 \quad \boxed{|\alpha| > 1}$