CALCOLO NUMERICO 1 (2 dicembre 2010) - Prima prova in itinere

1) Studiare il condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{2} + \frac{\sqrt{x-2}}{2}$$

e stabilire per quali $x \in (2, \infty)$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 5$.

2) Sono assegnati i nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ e la funzione

$$f(x) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} x + \sin \frac{\pi}{2} x.$$

2.1) Calcolare il polinomio p che interpola f nei nodi x_0, x_1 e x_2 e il polinomio q che interpola f nei nodi x_0, x_1, x_2 e x_3.

2.2) Fornire una maggiorazione dell'errore

$$\max_{x \in [0,2]} |f(x) - p(x)|.$$

2.3) Determinare il polinomio di grado 1 che approssima i dati $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, ..., 3$ nel senso dei minimi quadrati discreti.

3) Utilizzando sia la stima classica che la stima asintotica dell'errore, trovare quanti sottointervalli di uguale ampiezza sono necessari per approssimare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{2} (|x^3| - 3x^2) \, \mathrm{d}x,$$

con la formula dei trapezi compositi, in modo da commettere un errore minore di 10^{-3}.

4) Dati $n+1$ nodi equispaziati su un intervallo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b,$$

e una funzione $f \in C^2[a, b]$, definire e costruire la spline lineare interpolante f nei nodi assegnati e dimostrare la relativa stima dell'errore.