

CALCOLO NUMERICO (15 febbraio 2006)

- 1) Scrivere e giustificare i test di arresto utilizzati nell'approssimazione numerica di radici di equazioni non lineari con il metodo di Newton e con i metodi di punto fisso.
- 2) Calcolare la fattorizzazione LU della matrice tridiagonale $A \in \mathbf{R}^{5 \times 5}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dedurre L e U nel caso generale di una matrice tridiagonale $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, avente 2 sulla diagonale principale e -1 sulle diagonali adiacenti alla diagonale principale.

- 3) Determinare il grado di precisione della formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{4}{3} f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} f(0) + \frac{4}{3} f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Utilizzare tale formula per approssimare il valore dell'integrale definito

$$\int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

e calcolare l'errore commesso.

- 4) Dimostrare graficamente che l'equazione non lineare

$$f(x) \equiv 3x - \cos x - 1 = 0$$

ha una radice $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$. Dimostrare che il metodo di Newton converge alla radice α per ogni scelta di $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$. Calcolare $x_2 \approx \alpha$ a partire da $x_0 = 0$.

- 5) Dato l'insieme di punti

$$\{(0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 3), (5, 2)\},$$

scrivere l'espressione della spline lineare $s_1(x)$ che interpola i dati e disegnarne il grafico. Calcolare $s_1(3.5)$.