CALCOLO NUMERICO (17 febbraio 2009)

1) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ con $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^4$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 4a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R} \ ,$$

(1.1) Determinare per quali valori di a la matrice A è invertibile.

(1.2) Determinare per quali valori di a la matrice A è diagonalmente dominante.

(1.3) Determinare per quali valori di a il metodo di Jacobi è convergente e calcolare la velocità asintotica di convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel.

(1.4) Nel caso particolare $a = \frac{1}{8}$ calcolare la fattorizzazione LU della matrice A.

2) Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare $f(x) = 0$, con $f(x) \equiv e^x(x-2)$, e, dopo avere individuato la funzione di iterazione g associata al metodo di Newton, discutere graficamente la convergenza del metodo iterativo di punto fisso

$$x_{k+1} = g(x_k), \ k \geq 0, \quad x_0 > 1 \text{ assegnato},$$

e stabilire l'ordine di convergenza del metodo.

3) Sono assegnati i tre nodi $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, e le funzioni

$$f(x) = 1 - \sin\frac{\pi}{2}x, \quad g(x) = (x-1)^4.$$

(3.1) Calcolare i polinomi di interpolazione p e q rispettivamente delle due funzioni f e g nei nodi assegnati.

(3.2) Determinare una maggiorazione per ciascuno dei due errori di interpolazione $|f(x) - p(x)|$ e $|g(x) - q(x)|$, per $x \in [0, 2]$.

(3.3) Si aggiungano ai nodi iniziali i due nodi $x_3 = \frac{1}{2}$ e $x_4 = \frac{3}{2}$.
Scrivere, senza eseguire ulteriori calcoli, il polinomio di interpolazione r della funzione g rispetto ai nodi $x_i, \ i = 0, ..., 4$ e il relativo errore $|g(x) - r(x)|$, per $x \in [0, 2]$, motivando la risposta.