CALCOLO NUMERICO 1 (3 febbraio 2011) - Seconda prova in itinere

1) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice $n \times n$ di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} n & \text{se } i = j, \\ \frac{1}{n} & \text{se } i = 1 \wedge j = n \text{ oppure } j = 1 \wedge i = n, \qquad n \geq 3: \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1.1) localizzare gli autovalori di A e fornire una maggiorazione per $K_2(A)$;

1.2) dire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono, giustificando la risposta ;

1.3) calcolare $\|A\|_\infty$;

1.4) si consideri la decomposizione di $A = N - P$, con N matrice diagonale di elementi $N_{ii} = n + \frac{1}{n}$, e il metodo iterativo $\mathbf{x}_{k+1} = B\mathbf{x}_k + N^{-1}\mathbf{b}$, $B = N^{-1}P$; ricavare le matrici N, P e B e verificare che $\|B\|_\infty < 1$. Dire se il metodo iterativo proposto converge, motivando la risposta.

2) Si consideri l'equazione non lineare

$$f(x) \equiv \frac{1 - x}{e^x} = 0.$$

2.1) Verificare che esiste una sola radice $\alpha \in (0, 1.5)$ e stimare il numero di iterazioni del metodo di bisezione necessarie per approssimare α con un errore assoluto minore di 10^{-2}.

2.2) Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, discuterne la convergenza al variare di $x_0 < 2$.
Stabilire l'ordine di convergenza del metodo.

3) Discutere il problema del condizionamento nella risoluzione di un sistema lineare.