CALCOLO NUMERICO 1 (10 febbraio 2011)

1) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

1.1) calcolare la fattorizzazione LU, senza applicare la tecnica del pivoting;

1.2) calcolare $\det(A_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, dove A_k è la sottomatrice principale di ordine k;

1.3) determinare per quali valori di a i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono, e stabilire la relazione tra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi.

2) Studiare il condizionamento $K_f(t)$ della funzione $f(t) = \frac{2t}{t^2+1}$ e stabilire per quali valori di t il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(t) < 1$.

3) Sono assegnati i nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, e la funzione $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

3.1) Calcolare il polinomio p che interpola f nei nodi x_0, x_1 e x_2.

3.2) Fornire una maggiorazione dell'errore $\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p(x)|$.

3.3) Stimare il numero minimo di sottointervalli di uguale ampiezza in cui si deve suddividere l'intervallo $[-1, 1]$, affinchè l'errore che si commette interpolando con una spline lineare la funzione f sia minore di 10^{-2}.

4) Sia $f \in C^1[a, b]$. Verificare che la formula di quadratura

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx f(x_0)(b-a) + f'(x_0)\frac{1}{2}[(b-x_0)^2 - (a-x_0)^2], \quad x_0 \in [a, b],$$

ha grado di precisione almeno 1.

5) Dimostrare che il metodo di Newton per la ricerca di una radice semplice di un'equazione non lineare è del secondo ordine, mentre nel caso di radici con molteplicità superiore a 1 è di ordine 1.