CALCOLO NUMERICO 1 (24 febbraio 2011)

1) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^3 & 1 & 0 \\ \alpha^4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in (0,1),$$

1.1) calcolare $\det(A)$ e $\|A\|_\infty$;

1.2) determinare per quali valori di α i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono, e stabilire la relazione tra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi;

1.3) nel caso particolare $\alpha = 0.5$, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, stimare il numero minimo di iterazioni k affinchè l'iterata k-esima del metodo di Gauss-Seidel soddisfi la disuguaglianza

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_\mathbf{2}} < 10^{-4}.$$

2) Studiare il condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$$

e stabilire per quali $x \in (1, \infty)$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 1$.

3) Si consideri l'equazione non lineare $f(x) \equiv 1 - \sqrt{x} = 0$. Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, discuterne la convergenza al variare di $x_0 > 0$. Stabilire l'ordine di convergenza del metodo.

4) Costruire la retta dei minimi quadrati discreti $y = p_1(x) = c_0 + c_1 x$, relativa ai nodi $(x_i, f(x_i))$, con $x_i = i$, $i = 0, ..., 4$, e

$$f(x) = x + \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right).$$

Verificare che il punto di coordinate (M_x, M_y), verifica l'equazione della retta, dove

$$M_x = \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{4} x_i, \quad M_y = \frac{1}{5}\sum_{i=0}^{4} f(x_i),$$

e calcolare l'errore globale commesso

$$E = \sum_{i=0}^{4} [f(x_i) - p_1(x_i)]^2.$$

5) Dimostrare (a scelta) la stima dell'errore classica o composita relativa alla formula di quadratura dei trapezi compositi.