CALCOLO NUMERICO 1 (2 febbraio 2012)

1) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con A matrice 4×4 di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ \frac{1}{2}, & \text{se } i = 4 \wedge j = 1,2,3 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } j = 4 \wedge i = 1,2,3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} :$$

1.1) studiare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel;

1.2) dire se A è definita positiva, giustificando la risposta;

1.3) calcolare la fattorizzazione $A = LU$;

1.4) dato il metodo iterativo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - \alpha U)\mathbf{x}^{(k)} + \alpha L^{-1}\mathbf{f}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

dove L e U sono le matrici ricavate al punto 1.3), stabilire per quali valori di α, e solo per quelli, il metodo risulta convergente.

2) Studiare esistenza e unicità, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ della soluzione del seguente problema di interpolazione: *determinare il polinomio di secondo grado $p_2(x)$ tale che*

$$p_2(a) = u_a; \; p_2(b) = u_b, \; b > a; \; p_2'(x_\alpha) = u_\alpha, \quad x_\alpha = a + \alpha, \; \alpha \in [0, b - a],$$

per ogni insieme di dati $u_a, \; u_b, \; u_\alpha$. Scegliere un opportuno valore di α per cui esista e sia unico il polinomio interpolante, e costruire la formula di quadratura corrispondente. Che grado di precisione ha la formula costruita? E' una formula di tipo Gaussiano?

3) Trovare e discutere un metodo numerico di ordine due per determinare l'ascissa del punto di intersezione tra il grafico della funzione $f_1(x) = e^{-x}$ e il grafico della funzione $f_2(x) = x - 1$.

4) Sia $Q = \omega_1 f(\alpha_1) + \omega_2 f(\alpha_2)$ una formula di tipo Gaussiano a due nodi per l'approssimazione numerica dell'integrale definito $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$. Dimostrare che $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Trovare un polinomio $q(x)$ di grado opportuno per cui $\int_{-1}^{1} q(x)\mathrm{d}x \neq \omega_1 q(\alpha_1) + \omega_2 q(\alpha_2)$.

5) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione $f(x) = e^{-x^2}$.