

CALCOLO NUMERICO 1 (16 febbraio 2012)

- 1) Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice 3×3 di elementi

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$$

- 1.1) trovare una condizione necessaria e sufficiente su α affinché A sia definita positiva e, in questo caso, calcolare $\|A\|_2$ e tracciarne il grafico al variare di α ;
- 1.2) studiare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel;
- 1.3) nel caso $\alpha = 2$ calcolare la fattorizzazione $A = LU$ e verificare che $\|A\|_\infty \leq \|L\|_\infty \|U\|_\infty$.

- 2) Studiare convergenza e ordine di convergenza dei seguenti metodi iterativi

$$x_{n+1} = \frac{\cos(2x_n)}{3}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n - \cos(2x_n)}{3 + 2\sin(2x_n)},$$

con $x_0 \in [0, \pi/4]$, per la ricerca dello zero della funzione $f(x) = 3x - \cos(2x)$.

- 3) Calcolare la funzione spline lineare interpolante la funzione $f(x) = xe^{-x}$ nei nodi $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3/2, x_3 = 2, x_4 = 3$. Dare una stima dell'errore di interpolazione.
- 4) Sia A una matrice simmetrica, definita positiva, si consideri il seguente metodo iterativo (ω è uno scalare positivo)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}),$$

per l'approssimazione numerica della soluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Per quali valori di ω il metodo è convergente? (Fornire una dimostrazione).

- 5) Studiare il condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}$$

e stabilire per quali $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$ il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 10$.