

**CALCOLO NUMERICO 1** (16 febbraio 2012)

- 1) Dato il sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , con  $A$  matrice  $3 \times 3$  di elementi

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :$$

- 1.1) trovare una condizione necessaria e sufficiente su  $\alpha$  affinché  $A$  sia definita positiva e, in questo caso, calcolare  $\|A\|_2$  e tracciarne il grafico al variare di  $\alpha$ ;
- 1.2) studiare la convergenza del metodo di Gauss-Seidel;
- 1.3) nel caso  $\alpha = 2$  calcolare la fattorizzazione  $A = LU$  e verificare che  $\|A\|_\infty \leq \|L\|_\infty \|U\|_\infty$ .

- 2) Studiare convergenza e ordine di convergenza dei seguenti metodi iterativi

$$x_{n+1} = \frac{\cos(2x_n)}{3}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n - \cos(2x_n)}{3 + 2\sin(2x_n)},$$

con  $x_0 \in [0, \pi/4]$ , per la ricerca dello zero della funzione  $f(x) = 3x - \cos(2x)$ .

- 3) Calcolare la funzione spline lineare interpolante la funzione  $f(x) = xe^{-x}$  nei nodi  $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3/2, x_3 = 2, x_4 = 3$ . Dare una stima dell'errore di interpolazione.
- 4) Sia  $A$  una matrice simmetrica, definita positiva, si consideri il seguente metodo iterativo ( $\omega$  è uno scalare positivo)

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \omega(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}),$$

per l'approssimazione numerica della soluzione del sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Per quali valori di  $\omega$  il metodo è convergente? (Fornire una dimostrazione).

- 5) Studiare il condizionamento  $K_f(x)$  della funzione

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}$$

e stabilire per quali  $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$  il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che  $K_f(x) < 10$ .