CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 6 febbraio 2013

1) Si consideri la matrice A di ordine n, con $n = 6, 8, 10, 12$, avente 3 sulla diagonale principale, 4 sulla diagonale di posizione -2, 5 sulla diagonale di posizione -4, 1 nel triangolo superiore ad eccezione della diagonale principale, e il sistema lineare $A^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} = [1\ 1...1]^T$. Si vuole risolvere il sistema dato con un metodo diretto che non preveda il calcolo della potenza A^2, ma solo la fattorizzazione $PA = LU$. A tale scopo, si implementi la seguente procedura:

$$\begin{cases} A \cdot A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ PA \cdot A\mathbf{x} = P\mathbf{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L\underbrace{U\ A\mathbf{x}}_{\mathbf{y}} = P\mathbf{b} \\ \mathbf{y}:\ L\mathbf{y} = P\mathbf{b} \\ \mathbf{z}:\ U\underbrace{A\mathbf{x}}_{\mathbf{z}} = \mathbf{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A\mathbf{x} = \mathbf{z}) \\ PA\mathbf{x} = P\mathbf{z} \\ \mathbf{w}:\ L\underbrace{U\mathbf{x}}_{\mathbf{w}} = P\mathbf{z} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{w} \end{cases}$$

Per ogni valore di n si riportino nella tabella le quantità: x_1, $\|A\|_2$ e $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$. A tale scopo si calcolino gli autovalori di A.

n	6	8	10	12
x_1				
$\|A\|_2$				
$\det(A)$				

2) Si vuole interpolare $f(x) = \sin x + 2\cos x$ sull'intervallo $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ con il metodo di Lagrange utilizzando $n = 5, 9, 17$ nodi equispaziati su I. Sia p_n il polinomio interpolatore. Per ogni n si utilizzino $N_n = 2^{\frac{n+1}{2}}$ nodi equispaziati su I, $(z_j,\ j = 1, ..., N_n)$ per calcolare l'errore

$$E_n = \max_{j=1,...,N_n} |f(z_j) - p_n(z_j)|.$$

Riportare nella tabella E_n. Si utilizzino poi i valori $p(z_j),\ j = 1, ..., N_n$ per ottenere un valore approssimato I_{app} di $\int_I f(x)dx$ (sia I_{ex} il valore esatto) con la formula di quadratura dei trapezi compositi, relativa a $M = N_n - 1$ sottointervalli. Riportare nella tabella $E_I = |I_{ex} - I_{app}|$.

n	E_n	E_I
5		
9		
17		

3) Il metodo delle corde per la ricerca di uno zero di una funzione derivabile $f(x)$ consiste nella seguente iterazione,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{c}, \quad c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

con x_0 valore assegnato. Applicare il metodo delle corde per l'approssimazione di uno zero della funzione,

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1.$$

Come test di arresto si consideri

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon |x_{n+1}|$$

dove ε è una prefissata tolleranza, oltre al controllo di non oltrepassare un numero `nmax` di iterazioni.

- Verificare che nell'intervallo $I = [0, 3]$ vi è una radice;
- utilizzare il metodo di bisezione per approssimare lo zero a meno di un errore di 0.1 (quante iterazioni compie il metodo di bisezione?);
- utilizzare l'approssimazione ottenuta con il metodo di bisezione come valore iniziale x_0 del metodo delle corde da utilizzare con un opportuno valore del parametro c (da scegliere). Riportare il valore c scelto, ed il numero di iterazioni del metodo delle corde per approssimare lo zero a meno di $\varepsilon = 10^{-4}$.

- zero trovato con il metodo di bisezione e numero di iterazioni

- scelta di c e spiegazione

- zero trovato con il metodo delle metodo delle corde e numero di iterazioni