CALCOLO NUMERICO 1 (7 febbraio 2013)

1) È dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice $n \times n$ avente 1 sulla diagonale principale, $-\alpha$ sulla prima sottodiagonale, $a_{1n} = -\alpha$, con $\alpha > 0$. Si scrivano le matrici di iterazione B_J e B_{GS} rispettivamente dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel e si dia una condizione necessaria e sufficiente su α affinchè i metodi convergano. Si trovi la relazione fra le velocità di convergenza dei due metodi.

2) Si consideri $f(x) = e^{(\frac{x}{2})}$ e $p_n(x)$ polinomio di interpolazione di f relativo ai nodi $x_i = i/n,\ i = 0, ..., n$. Dimostrare che $\forall x \in [0, 1]$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - p_n(x)] = 0.$$

3) Data la formula di quadratura numerica

$$I = \int_0^{3h} f(x)\mathrm{d}x \approx Af(h) + Bf(2h), \quad h > 0,$$

determinare il grado di precisione in funzione dei parametri A, B. Fornire una stima dell'errore che si commette utilizzando la formula ed applicare tale stima nel caso di $h = 1$, $f(x) = xe^{-4x}$.

4) Studiare le seguenti iterazioni di punto fisso (esistenza ed eventuale localizzazione dei punti fissi, convergenza, ordine),

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}e^{x_n}, \quad x_{n+1} = \log(4x_n).$$

5) Le seguenti implicazioni sono vere o false? (qui A è una matrice quadrata $n \times n$ e $K(A)$ numero di condizionamento di A)

$$\det(A) \le 10^{1-n} \Rightarrow K_2(A) \ge 10^n$$

$$K_2(A) \ge 10^n \Rightarrow \det(A) \ge 10^{n-1}$$

$$\|A\|_\infty > 1 \Rightarrow \text{ il metodo di Jacobi diverge}$$