CALCOLO NUMERICO 1 (7 febbraio 2013)

1) È dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice $n \times n$ avente 1 sulla diagonale principale, $-\alpha$ sulla prima sottodiagonale, $a_{1n} = -\alpha$, con $\alpha > 0$. Si scrivano le matrici di iterazione B_J e B_{GS} rispettivamente dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel e si dia una condizione necessaria e sufficiente su α affinchè i metodi convergano. Si trovi la relazione fra le velocità di convergenza dei due metodi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & -\alpha \\ -\alpha & 1 & & & 0 \\ & -\alpha & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha > 0$$

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = -(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & & \alpha \\ \alpha & 0 & & & 0 \\ & \alpha & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(B_J - \lambda I) = 0$ oppure (cambia solo il segno)

$$\det(\lambda D + L + U) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & -\alpha \\ -\alpha & \lambda & & \\ & -\alpha & \ddots & \\ & & -\alpha & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^n \pm \alpha(-\alpha)^{n-1} = 0 \implies |\lambda| = |\alpha| = \alpha$$

$$\rho(B_J) = \alpha < 1$$

$$B_{GS} = -(D+L)^{-1}U =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -\alpha & 1 & & \\ & -\alpha & \ddots & \\ & & -\alpha & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ 0 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \alpha & 1 & & \\ \alpha^2 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ \alpha^{n-1} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & 0 & \alpha \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

serve solo la 1ª colonna!

$$= \begin{bmatrix} 0 & & & \alpha \\ 0 & 0 & & \alpha^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & & & \alpha^n \end{bmatrix} \implies \lambda_i(B_{GS}) = \begin{cases} 0 & i = 1, \ldots, n-1 \\ \alpha^n & i = n \end{cases}$$

$\rho(B_{GS}) = \alpha^n$ Conv. $\alpha < 1$ Relaz. $R(B_{GS}) = n\,R(B_J)$

2) Si consideri $f(x) = e^{\left(\frac{x}{2}\right)}$ e $p_n(x)$ polinomio di interpolazione di f relativo ai nodi $x_i = i/n,\ i = 0, ..., n$. Dimostrare che $\forall x \in [0,1]$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} [f(x) - p_n(x)] = 0.$$

M1

7 feb 2013

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}}$$

$$f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)$$

$$|f(x) - p_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{|x-x_0|}_{\le 1} \underbrace{|x-x_1|}_{\le 1} \cdots \underbrace{|x-x_n|}_{\le 1} \max_{0 \le t \le 1} |f^{(n+1)}(t)|$$

$$f(t) = e^{\frac{t}{2}}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \qquad f''(t) = \frac{1}{4} e^{\frac{t}{2}} \qquad f'''(t) = \frac{1}{8} e^{\frac{t}{2}}$$

$$\ldots \quad f^{(n+1)}(t) = \frac{1}{2^{n+1}} e^{t/2}$$

$$|f^{(n+1)}(t)| \le \frac{1}{2^{n+1}} \sqrt{e}$$

$$|f(x) - p_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \sqrt{e} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

3) Data la formula di quadratura numerica

$$I = \int_0^{3h} f(x)\mathrm{d}x \approx Af(h) + Bf(2h), \quad h > 0,$$

determinare il grado di precisione in funzione dei parametri A, B. Fornire una stima dell'errore che si commette utilizzando la formula ed applicare tale stima nel caso di $h = 1$, $f(x) = xe^{-4x}$.

M1 $\longrightarrow$

7 feb 2013

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx \approx A f(h) + B f(2h) \qquad h>0$$

- G.P.=0 $\quad f(x)=1$

$$\int_0^{3h} 1\,dx = 3h \qquad A+B=3h$$ condizione per garantire G.P.=0

- GP=1 $\quad f(x)=x$

$$\int_0^{3h} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{3h} = \frac{9h^2}{2}$$

$$A\cdot h + 2h\cdot B = \frac{9}{2}h^2$$

$$\begin{cases} A = 3h - B \\ (3h-B)\,h + 2Bh = \frac{9}{2}h^2 \end{cases}$$

$$3h^2 - Bh + 2Bh = \frac{9}{2}h^2 \qquad Bh = \frac{3}{2}h^2 \qquad B = \frac{3}{2}h \rightarrow A = \frac{3}{2}h$$

$$\tilde{I} = \frac{3}{2}h\left[f(h) + f(2h)\right]$$

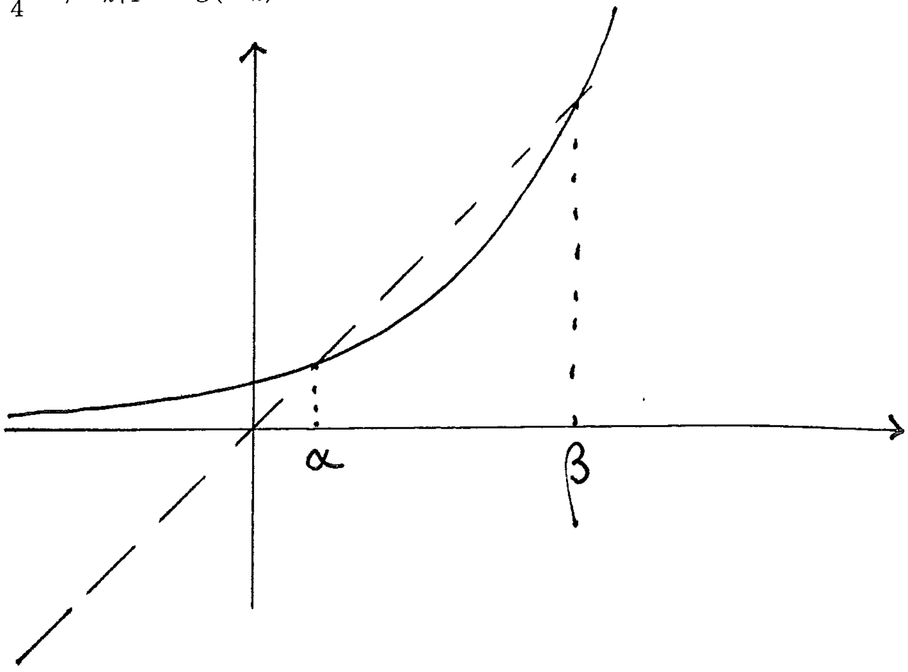
4) Studiare le seguenti iterazioni di punto fisso (esistenza ed eventuale localizzazione dei punti fissi, convergenza, ordine),

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}e^{x_n}, \quad x_{n+1} = \log(4x_n).$$

MI 7/02/2013

• $g(x) = \frac{1}{4}e^x$

x		$g(x)$
0	$<$	0.25
1	$>$	$\frac{e}{4}$
2	$>$	$\frac{e^2}{4}$
3	$<$	$\frac{e^3}{4}$



$0 < \alpha < 1$, $2 < \beta < 3$

$g'(x) = \frac{1}{4}e^x$

$|g'(x)| < 1$

$x < \log 4$

$g'(0) < g'(\alpha) < g'(1)$

$0 < 0.25 < g'(\alpha) < \frac{e}{4} < 1 \Rightarrow$ C.S. convergenza

$g'(2) < g'(\beta) < g'(3)$

$1 < \frac{e^2}{4} < g'(\beta) < \frac{e^3}{4} \Rightarrow$ NO C.S. convergenza

Studio grafico

- $x_0 < \alpha$, x_n succ. mon. cresc. lim. sup. da $\alpha \Rightarrow x_n \nearrow \alpha$
- $\alpha < x_0 < \beta$, x_n " " decres " inf " " $\Rightarrow x_n \searrow \alpha$
- $x_0 > \beta$, x_n " " cresc. illim. sup $\Rightarrow x_n \nearrow +\infty$

$\Rightarrow x_0 < \beta$, $x_n \to \alpha$ ||| "$x_0 = \beta$, $x_n = \beta$" ||| $x_0 > \beta$, $x_n \to +\infty$

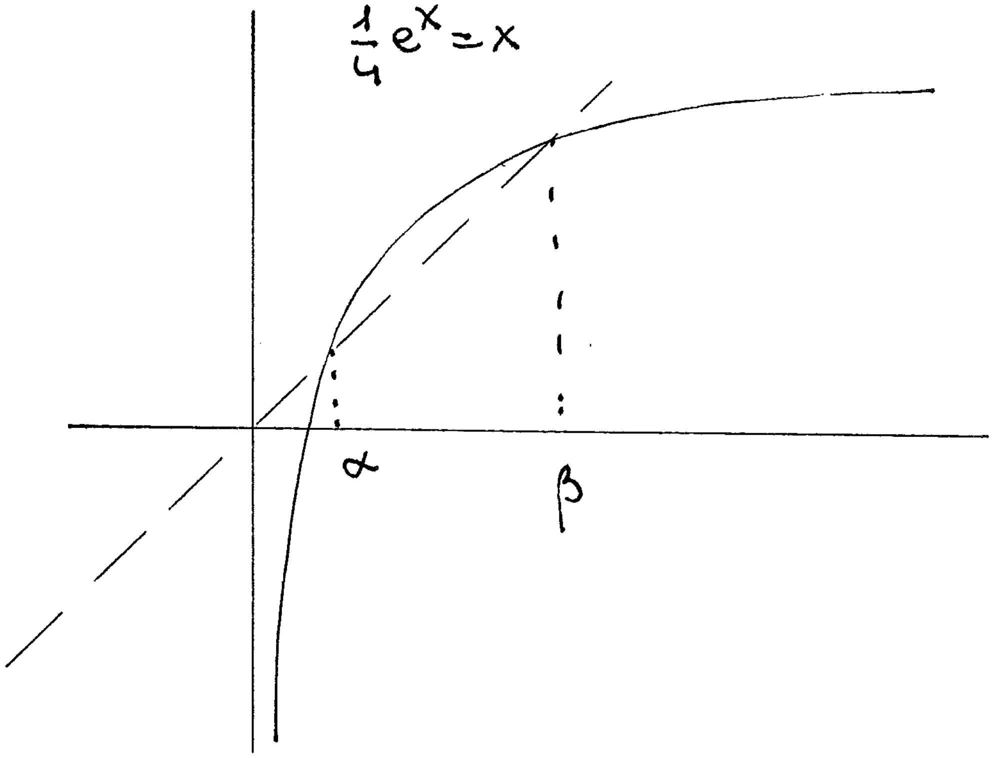
$g'(\alpha) \neq 0$ $(g'(\alpha) < 1) \Rightarrow$ ordine 1

C.S. $x_0 < \log \alpha$; CNS $x_0 < \beta$

• $g(x) = \log 4x$ C.E. $x>0$

$$x = \log 4x$$
$$e^x = 4x$$
$$\frac{1}{4}e^x = x$$

x	$g(x)$
$(x \to 0)$	$(g(x) \to -\infty)$
$\frac{1}{4}$ >	0
1 <	$\log 4$
2 <	$\log 8$
3 >	$\log 12$



$\dots \quad \frac{1}{4} < \alpha < 1, \qquad 2 < \beta < 3$

$g'(x) = \frac{1}{x}$ (decrescente) $\qquad 1 = g'(1) < g'(\alpha) < g'\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \Rightarrow$ NO C.S. convergenza

$|g'(x)| < 1$, $x > 1$ $\qquad \frac{1}{3} = g'(3) < g'(\beta) < g'(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ C.S. convergenza

Studio grafico.

⊕ $x_0 < \alpha$, $\exists \bar{n} : x_{\bar{n}} < 0$ STOP $x_{\bar{n}} \notin$ C.E.

⊕ $\alpha < x_0 < \beta$, x_n succ mon. cresc. lim. sup. da $\beta \Rightarrow x_n \nearrow \beta$

⊕ $x_0 > \beta$, " " " decresc. " inf " " $\Rightarrow x_n \searrow \beta$

$\Rightarrow x_0 > \alpha$, $x_n \to \beta$ ||| "$x_0 = \alpha$, $x_n = \alpha$" ||| $x_0 < \alpha$ STOP

$g'(\beta) \neq 0$ $(g'(\beta) < 1) \Rightarrow$ ordine 1

C.S. $x > 1$; CNS $x_0 > \alpha$

5) Le seguenti implicazioni sono vere o false? (qui A è una matrice quadrata $n \times n$ e $K(A)$ numero di condizionamento di A)

$$\det(A) \leq 10^{1-n} \Rightarrow K_2(A) \geq 10^n$$

$$K_2(A) \geq 10^n \Rightarrow \det(A) \geq 10^{n-1}$$

$$\|A\|_\infty > 1 \Rightarrow \text{ il metodo di Jacobi diverge}$$

M I

7/2/2013

- $\det A \leq 10^{1-n} \overset{?}{\Longrightarrow} K_2(A) \geq 10^n$

$n=2 \quad 10^{1-2} = \frac{1}{10}$

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \frac{1}{100} < \frac{1}{10}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

$\|A\|_2 = \frac{1}{10} \qquad \|A^{-1}\|_2 = 10 \Rightarrow K_2(A) = 1$ Falsa

- $K_2(A) \geq 10^n \Rightarrow \det A \geq 10^{n-1}$

$n=2 \quad 10^2 = 100 \quad 10^{2-1} = 10$

$A = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & \frac{1}{100} \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{100} & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad K_2(A) = 10000$

$\|A\|_2 = 100 \qquad \|A^{-1}\|_2 = 100$

Falsa

$\det A = 1$

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \|A\|_\infty = 3$

Md Jacobi converge essendo A matrice diagonalmente dominante

Falsa