CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 20 febbraio 2013

1) Approssimare l'integrale improprio

$$(*) \qquad \int_0^{\infty} xe^{-2x}\mathrm{d}x.$$

con il metodo dei trapezi compositi applicato all'integrale definito

$$I_b = \int_0^b xe^{-2x}\mathrm{d}x, \quad b = 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

Fissato b, sia $M_b = 10b$ il numero di sottointervalli di uguale ampiezza e sia I_b il corrispondente valore ottenuto. Successivamente si consideri per $(*)$ la sostituzione $t = e^{-x}$ e, dopo aver trovato i nuovi estremi di integrazione a_1 e b_1, si approssimi l'integrale definito

$$(**) \qquad I = \int_{a_1}^{b_1} f(t)\mathrm{d}t,$$

con il metodo del punto medio composito, relativo alla suddivisione di $[a_1, b_1]$ in N intervalli di uguale ampiezza, con $N = 50, 100, 150, 200$. Siano I_N i valori ottenuti. Riportare nelle tabelle i valori trovati di I_b e I_N.

	$b=5$	$b=6$	$b=7$	$b=8$	$b=9$	$b=10$
I_b						

	$N=50$	$N=100$	$N=150$	$N=200$
I_N				

2) Approssimare l'unica radice dell'equazione $f(x) \equiv (x-1)^2 \log x = 0$, avente molteplicità $q > 1$, con il metodo di Newton modificato

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad p = 1, 2, 3, 4$$

utilizzando $x_0 = 2$, test d'arresto $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-8}$, e si riporti $\forall\, p$ il numero di iterazioni `it`, $x_{\mathtt{it}}$ e $f'(x_{\mathtt{it}})$. Dedurre il valore di q e l'ordine del metodo di Newton $\forall\, p$, giustificando le risposte.

	`it`	$x_{\mathtt{it}}$	$f'(x_{\mathtt{it}})$
$p=1$			
$p=2$			
$p=3$			
$p=4$			

3) Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare con A è matrice tridiagonale $N \times N$, $N > 2$, avente diagonale principale con tutti elementi uguali a 4, sotto-diagonale e sopra-diagonale con tutti elementi uguali a -1. Si consideri il metodo iterativo,

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha \left(A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b} \right),$$

con $\alpha > 0$. Trovare una condizione per α che garantisca la convergenza del metodo utilizzando gli autovalori della matrice A, e riportare tale condizione nel caso $N = 10$ ed $N = 20$.
Per $N = 20$, costruire il vettore termine noto $\mathbf{b}$ in modo tale che la soluzione sia il vettore costante $\mathbf{x} = (1, 1, \ldots, 1)^T$. Fissare un valore α e valutare quante iterazioni sono necessarie per approssimare la soluzione a meno di $err_1 = 10^{-4}$ e a meno di $err_2 = 10^{-8}$ (si consideri l'errore nella norma euclidea). In entrambi i casi calcolare anche la norma del residuo: $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$.

Condizione su α nel caso generale:

Spiegazione:

Condizione su α nel caso $N = 10$:

Condizione su α nel caso $N = 20$:

$N = 20$	condizione su α	`it`	$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$
err_1			
err_2			