CALCOLO NUMERICO 1 (21 febbraio 2013)

1) Data la formula di quadratura
$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x \approx \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\frac{\pi}{2}) + \omega_3 f(\pi),$$
determinare i parametri ω_1, ω_2, ω_3 in modo dale che sia esatta per $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$. Applicare la formula trovata per approssimare
$$\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x,$$
e calcolare l'errore commesso.

2) Applicare il metodo di Newton all'equazione $f(x) \equiv x^3 - 3x - 2 = 0$, e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, discuterne la convergenza e l'ordine al variare di x_0.

3) Si consideri il seguente sistema lineare $A_\beta \mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove la matrice A_β è la seguente
$$A_\beta = \begin{pmatrix} 3 & \beta & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1+\beta & 3 \end{pmatrix}$$
con β parametro reale non negativo, $\beta \geq 0$.

1. determinare l'insieme dei valori β per cui il metodo di Jacobi converge.
2. Trovare l'insieme dei valori β per cui il metodo di Gauss-Seidel converge.
3. Trovare il valore ottimale β_{opt} per il metodo iterativo di Gauss-Seidel.

4) Assegnata la funzione $f(x) = 1 - x^2$ ed i nodi
$$x_0 = -h,\ x_1 = h,\ 0 < h \leq 1,$$
determinare il polinomio $p_1(x)$ che la interpola nei nodi assegnati. Successivamente determinare il valore ottimale del parametro h che rende minima la quantità
$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_1(x)|.$$

5) Siano $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^N$, A matrice $N \times N$ non singolare e $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dimostrare la disuguaglianza
$$\frac{\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x_0} - \mathbf{x}\|} \leq K(A)\frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x_1}\|}{\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x_0}\|},$$
per una qualsiasi norma vettoriale $\|\cdot\|$ e dove $K(A)$ rappresenta il numero di condizionamento di A considerando la norma indotta da quella vettoriale scelta.