1) Data la formula di quadratura

$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x \approx \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\frac{\pi}{2}) + \omega_3 f(\pi),$$

determinare i parametri ω_1, ω_2, ω_3 in modo dale che sia esatta per $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$. Applicare la formula trovata per approssimare

$$\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x,$$

e calcolare l'errore commesso.

YII
21/02/2013

$$\int_0^\pi f(x)\,dx \approx \omega_1 f(0) + \omega_2 f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \omega_3 f(\pi)$$

- $\sin x$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = 2 \\ &\omega_1 \cdot 0 + \omega_2 + \omega_3 \cdot 0 = \omega_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_2 = 2$$

- $\cos x$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos x\,dx = 0 \\ &\omega_1 \cdot 1 + \omega_2 \cdot 0 + \omega_3 \cdot (-1) = 0 \end{aligned}\right\} \omega_1 = \omega_3$$

- $\sin 2x$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_3 = 1 \qquad \omega_2 = 2$$

$$\int_0^\pi \sin 2x\,dx = 0 \qquad \forall\, \omega_1, \omega_2, \omega_3$$

$$\omega_1 \cdot 0 + \omega_2 \cdot 0 + \omega_3 \cdot 0 = 0$$

- $\cos 2x$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos 2x\,dx = 0 \\ &\omega_1 \cdot 1 + \omega_2 (-1) + \omega_3 \cdot 1 = \end{aligned}\right\} \omega_1 + \omega_3 = 2$$

$$\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 = \omega_1 - 2 + \omega_3$$

$$\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}\,dx = \Big[-2\cos\frac{x}{2}\Big]_0^\pi = 2$$

$$\mathrm{ERR} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$$

$$\omega_1 f(0) + \omega_2 f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \omega_3 f(\pi) = \sin 0 + 2\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$$

2) Applicare il metodo di Newton all'equazione $f(x) \equiv x^3 - 3x - 2 = 0$, e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, discuterne la convergenza e l'ordine al variare di x_0.

MI 21/02/2013

$$f(x) = x^3 - 3x - 2 = 0 \qquad x^3 = 3x + 2$$

x	x^3	$3x+2$
-2	-8	-6
$\rightarrow -1$	-1	-1
0	0	2
1	1	5
$\rightarrow 2$	8	8
3	27	11

$f(-1) = 0$

$f(2) = 0$

Infatti $f(x) = (x+1)^2(x-2)$

$\alpha = -1$ Molteplicità 2

$\beta = 2$ " 1

M.d. Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$f'(x) = 2(x+1)(x-2) + (x+1)^2 = (x+1)(2x-4+x+1) = (x+1)(3x-3) = 3(x+1)(x-1)$$

$$g(x) = x - \frac{(x+1)^{\cancel{2}}(x-2)}{3\cancel{(x+1)}(x-1)} = \frac{3x^2-3x-x^2+x+2}{3(x-1)} = \frac{2}{3}\,\frac{x^2-x+1}{(x-1)}$$

P. FISSI

$$g(\alpha) = g(-1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1+1+1}{-2} = -1 = \alpha$$

$$g(\beta) = g(2) = \frac{2}{3}\,\frac{4-2+1}{1} = 2 = \beta$$

Studio di $y = g(x) \equiv \frac{2}{3}\,\frac{x^2-x+1}{x-1} = \frac{2}{3}\left[x + \frac{1}{x-1}\right]$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$g(0) = -\frac{2}{3}$

AS. VERTICALE $x = 1$

AS. OBLIQUO $y = \frac{2}{3}x$

Segno $g(x) > 0$ per $x > 1$

$g'(x) = \frac{2}{3}\left[1 - \frac{1}{(x-1)^2}\right] = \frac{2}{3}\,\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

		0		1		2	
g'	+	$\bullet$	−	$\nexists$	−	$\bullet$	+
g	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$M\left(0; -\frac{2}{3}\right)$

$m\,(2;2)$ P. FISSO β

C.S.
$g'(-1) = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ convergenza in $I(-1)$
1° ordine

$g'(2) = 0$
$\Rightarrow$ conv. in $I(2)$
almeno 2° ordine
$g''(2) \neq 0 \Rightarrow 2°$ ord

Studio grafico della convergenza

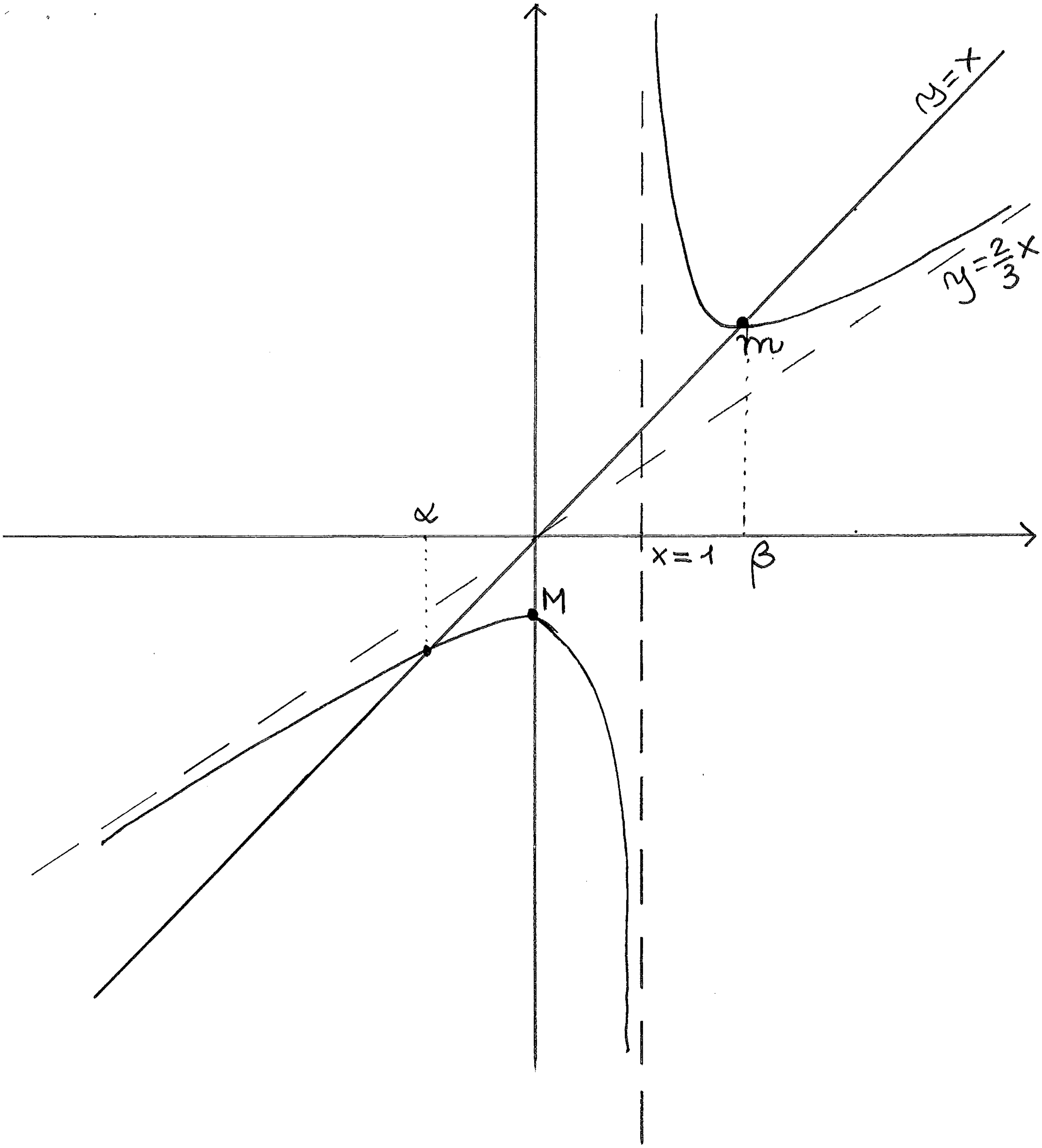
$x_0 < \alpha$ Succ. mon. cresc. lim sup da α: $x_n \nearrow \alpha$

$\alpha < x_0 < 0$ " " decresc " inf da α: $x_n \searrow \alpha$

$0 < x_0 < 1$ $x_1 < \alpha \vee x_1 < -\frac{2}{3} < 0 \Rightarrow$ vedi casi precedenti

$1 < x_0 < \beta$ $x_1 > \beta$

$x_0 > \beta$ succ. mon. decr. lim. inf da β: $x_n \searrow \beta$



Riepilogo:

$x_0=\alpha,\ x_n=\alpha\ \forall n \mid x_0=\beta,\ x_n=\beta\ \forall n$

$x_0<1 \quad x_n \to \alpha \quad$ ordine 1

$x_0>1 \quad x_n \to \beta \quad$ ordine 2

$x_0 \neq 1$

3) Si consideri il seguente sistema lineare $A_\beta x = b$ dove la matrice A_β è la seguente

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 3 & \beta & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1+\beta & 3 \end{pmatrix}$$

con β parametro reale non negativo, $\beta \geq 0$.

1. determinare l'insieme dei valori β per cui il metodo di Jacobi converge.
2. Trovare l'insieme dei valori β per cui il metodo di Gauss-Seidel converge.
3. Trovare il valore ottimale β_{opt} per il metodo iterativo di Gauss-Seidel.

MI

21/02/2013

$\det A = 3(9-1-\beta) - 3\beta = 24 - 6\beta \neq 0$

$\beta \neq 4$

(matrice singolare se $\beta = 4$)

Jacobi

$$\det\begin{pmatrix} 3\lambda & \beta & 0 \\ 1 & 3\lambda & 1 \\ 0 & 1+\beta & 3\lambda \end{pmatrix} = 3\lambda\left(9\lambda^2 - (1+\beta)\right) - 3\beta\lambda =$$

$$3\lambda\left(9\lambda^2 - 1 - \beta - \beta\right) = 3\lambda\left(9\lambda^2 - 1 - 2\beta\right) = 0$$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3}: \left(|\lambda| = \sqrt{\frac{|1+2\beta|}{9}}\right)$ Ma $\beta \geq 0 \Rightarrow$

$\lambda = \pm\frac{\sqrt{1+2\beta}}{3} \qquad \rho(B_J) = \frac{\sqrt{1+2\beta}}{3} < 1 \qquad \beta < 4$

$2\beta < 8 \quad \beta < 4$

G.S.

$$\begin{pmatrix} 3\lambda & \beta & 0 \\ \lambda & 3\lambda & 1 \\ 0 & (1+\beta)\lambda & 3\lambda \end{pmatrix} = 3\lambda\left(9\lambda^2 - \lambda - \beta\lambda\right) - \lambda(3\lambda\beta) =$$

$$3\lambda\left(9\lambda^2 - \lambda - \beta\lambda - \lambda\beta\right) =$$

$$3\lambda\left(9\lambda^2 - \lambda - 2\beta\lambda\right) = 3\lambda^2\left(9\lambda - 1 - 2\beta\right) = 0$$

$\lambda_{1,2} = 0 \qquad \lambda_3 = \frac{1+2\beta}{9} \qquad \rho(B_{GS}) = \frac{1+2\beta}{9} = \left[\rho(B_J)\right]^2$

Infatti la matrice è tridiagonale.

β_{opt}: Trovare β tale che rende minimo $\rho(B_{GS})$.

$$\min_{\beta \geq 0} \frac{1+2\beta}{9} = \frac{1}{9} \quad \text{per } \beta = 0$$

5) Siano $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^N$, A matrice $N \times N$ non singolare e $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dimostrare la disuguaglianza

M1

$$\frac{\|\mathbf{x_1} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x_0} - \mathbf{x}\|} \leq K(A)\frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax_1}\|}{\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax_0}\|},$$

21/02/2013

per una qualsiasi norma vettoriale $\|\cdot\|$ e dove $K(A)$ rappresenta il numero di condizionamento di A considerando la norma indotta da quella vettoriale scelta.

$$Ax = b$$

$$Ax - Ax_1 = b - Ax_1$$

$$A(x - x_1) = b - Ax_1$$

$$x - x_1 = A^{-1}(b - Ax_1)$$

$$\boxed{\|x - x_1\| \leq \|A^{-1}\| \, \|b - Ax_1\|}$$

Analogamente:

$$Ax = b$$

$$Ax - Ax_0 = b - Ax_0$$

$$A(x - x_0) = (b - Ax_0)$$

$$\|b - Ax_0\| \leq \|A\| \cdot \|x - x_0\|$$

$$\boxed{\frac{1}{\|x - x_0\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b - Ax_0\|}}$$

$$\Rightarrow \frac{\|x - x_1\|}{\|x - x_0\|} \leq K(A) \frac{\|b - Ax_1\|}{\|b - Ax_0\|}$$