4) Assegnata la funzione $f(x) = 1 - x^2$ ed i nodi

$$x_0 = -h, \ x_1 = h, \ 0 < h \leq 1,$$

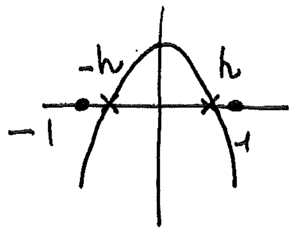
determinare il polinomio $p_1(x)$ che la interpola nei nodi assegnati. Successivamente determinare il valore ottimale del parametro $h$ che rende minima la quantità

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_1(x)|.$$

MI 21/02/2013

$f(-h) = 1 - h^2 \qquad f(h) = 1 - h^2$

$p_1(x) = 1 - h^2$



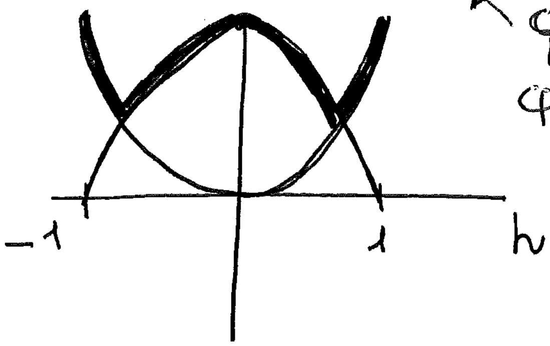

$f(x) - p_1(x) = 1 - x^2 - 1 + h^2 = h^2 - x^2 \qquad V(0; h^2)$

$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_1(x)| = \max\{|\varphi(-1)|, |\varphi(0)|, |\varphi(1)|\}$

$\varphi = f - p_1$

$\varphi(x) = h^2 - x^2$

$= \max\{|1 - h^2|, |h^2|\} =$




$\min_{h\in(0,1]} \max\{|1 - h^2|, |h^2|\}$ si ha per:

$1 - h^2 = h^2 \qquad 2h^2 = 1 \qquad h = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies$ (nodi di Chebyshev)

$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_1(x)| = \frac{1}{2}$