

CALCOLO NUMERICO 1 (20 Febbraio 2014)

- 1) Trovare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{2x}$$

e stabilire per quali x il calcolo della funzione è ben condizionato, nel senso che $K_f(x) < 1$.

- 2) Data la funzione $g(u) \equiv 1 + u - \frac{1}{8}u^3$:

- 2.1) g ha punti fissi?
- 2.2) Trovare un intorno I per ogni eventuale punto fisso in modo tale che la successione $u_{k+1} = g(u_k)$, $k \geq 0$, con $u_0 \in I$ assegnato, converga al punto fisso considerato.
- 2.3) Con che ordine converge eventualmente il metodo iterativo al punto 2.2)?
- 2.4) Nel caso di convergenza a un punto fisso α , stimare il numero di iterazioni per ottenere un errore $|\alpha - u_k| < 10^{-4}$.
- 3) Costruire la spline cubica naturale interpolante i punti $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(1, -1)$.
- 4) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- 4.1) Determinare per quali valori di a e solo per quelli i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono e trovare una relazione fra le velocità di convergenza;
- 4.2) Per i valori di a per i quali A risulta diagonalmente dominante calcolare la fattorizzazione $A = LU$ e le quantità $\|L\|_1$, $\|U\|_1$, $\|A\|_2$.
- 5) Sia P_N il polinomio ortogonale di Legendre di grado $N \geq 1$. Dimostrare che P_N ha N radici reali distinte appartenenti all'intervallo $(-1, 1)$.