Cognome: ______________ Nome: ______________ Matricola: __________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 19 febbraio 2014

1) Sia $f(x) = x^6 - x - 1$, e sia α la sua unica radice reale positiva. Si consideri il metodo di Newton per l'approssimazione di α.

1.1) Si trovi la radice esatta α con il comando Matlab `roots`. Posto $x^{(0)} = 1.5$, si riporti nella tabella l'errore $|\alpha - x^{(k)}|$ (usando il formato `%e`), per $k = 1, 2, \dots, 5$ (le scelte di `nmax` e `toll` sono ininfluenti);

1.2) sapendo che, se la successione $\{x^{(k)}\}_{k\geq 0}$ sta convergendo a α, si ha

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|\alpha - x^{(k)}|}{(\alpha - x^{(k-1)})^2} = |M|, \qquad \text{con } M := \left[\frac{-f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right],$$

si verifichi sperimentalmente la validità del limite confrontando la quantità $|M|(\alpha - x^{(k-1)})^2$ con l'errore $|\alpha - x^{(k)}|$, per $k = 1, \dots, 5$;

1.3) posto $\delta = \frac{1}{|M|}$, è noto che una condizione sufficiente per la convergenza del metodo di Newton è:

$$\alpha - \delta < x^{(0)} < \alpha + \delta.$$

Si definisca dunque il vettore di 7 coefficienti reali `kappa=linspace(0.25,2.5,7)` e si trovi sperimentalmente quale è il massimo elemento `kappa(i)`, `i=1:7`, tale per cui il metodo di Newton utilizzato con i parametri `toll=1e-6, nmax=300` e con dati iniziali:

a) `x0=alpha+kappa(i)*delta`

b) `x0=alpha-kappa(i)*delta`

converge alla radice cercata.

2) Data la funzione $f(x) = x\cos x$, sia S_3 la spline cubica con condizioni *not-a-knot* che interpola f in $n+1$ nodi equispaziati dell'intervallo $I = [0, 4\pi]$, con $n = 40, 80, 160$. Si considerino le funzioni g e s, rispettivamente derivata di f e di S_3: $g(x) = f'(x),\ s(x) = S_3'(x),\ \forall x \in I$.

Sia infine S_1 la spline lineare che interpola g nei medesimi $n+1$ nodi equispaziati dell'intervallo I ($n = 40, 80, 160$).

Dati 201 nodi equispaziati t_j di I, $j = 1, ..., 201$, ($t_0 = 0, ..., t_{200} = 4\pi$) si calcolino i seguenti errori:

$$E_1 = \max_{j=0,\dots,200} |g(t_j) - s(t_j)|, \quad E_2 = \max_{j=0,\dots,200} |g(t_j) - S_1(t_j)|.$$

Sapendo che $E_1 \approx C_1 n^{-p_1}$, $E_2 \approx C_2 n^{-p_2}$, dedurre dai risultati i valori di p_1 e p_2, motivando la risposta.

3) Si consideri il problema dell'approssimazione per difetto delle quantità $\|A\|_1$, $\|A\|_2$,$\|A\|_\infty$, dove A è una matrice quadrata di dimensione $n = 20$, avente elementi non nulli sulla diagonale principale, sulla prima e ultima riga, sulla prima e ultima colonna, così definita:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{n-1} & -\frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \dots & \sqrt{n} \end{pmatrix}.$$

A tale scopo, sfruttando la definizione di norma di matrici:

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{u}\neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|},$$

si calcolino le quantità N_1, N_2 e N_∞, dove:

$$N_\ell \equiv \max_{k=1,\dots,n} \frac{\|A\mathbf{u}_k\|_\ell}{\|\mathbf{u}_k\|_\ell}, (N_\ell \leq \|A\|_\ell), \quad \ell = 1, 2, \infty,$$

e i vettori $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, ..., n$, sono assegnati come segue:

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{elemento } 1 \\ \longrightarrow \text{elemento } 2 \\ \vdots \\ \longrightarrow \text{elemento } k \\ \longrightarrow \text{elemento } k+1 \\ \longrightarrow \text{elemento } k+2 \\ \vdots \\ \longrightarrow \text{elemento } n \end{array}$$

RISULTATI ESERCIZIO 1

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$\|\alpha - x^{(k)}\|$ $\|M\|\ (\alpha - x^{(k-1)})^2$					

$$\begin{cases} a)\ x_0 > \alpha \rightarrow \text{max elemento di } \texttt{kappa} \text{ per cui si ha convergenza:}\ \dots\dots\dots \\ b)\ x_0 < \alpha \rightarrow \text{max elemento di } \texttt{kappa} \text{ per cui si ha convergenza:}\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

RISULTATI ESERCIZIO 2

	$n = 40$	$n = 80$	$n = 160$	
E_1 E_2				$p_1 =$ $p_2 =$

RISULTATI ESERCIZIO 3

$N_1 = \dots\dots\dots\dots$ $N_2 = \dots\dots\dots\dots$ $N_\infty = \dots\dots\dots\dots$