CALCOLO NUMERICO 1 (12 Febbraio 2015)
COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE

1) Data formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f^{(k)}(1/3) + R(f),$$

dove $n \geq 0$, $f \in C^n[0,1]$ e $R(f)$ rappresenta il resto della formula, determinare il più piccolo valore di n ed i corrispondenti pesi $\{\omega_k\}$ in modo tale che la formula abbia grado di precisione almeno uguale ad uno. Fornire un'espressione del resto $R(f)$ per la formula trovata.

1) $n = 0$ $\quad f(x) = 1 \quad \int_0^1 1\,dx = 1$

$\omega_0 f(1/3) = 1 \qquad \omega_0 = 1$

2) $n = 1 \quad f(x) = x \quad \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$

$f'(x) = 1$

$\omega_0 f\left(\frac{1}{3}\right) + \omega_1 f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} + \omega_1 = \frac{1}{2} \qquad \omega_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6} f'\left(\frac{1}{3}\right)$$

Per fornire un'espressione del resto $R(f)$ si può sfruttare la formula di Taylor centrata in $x_0 = \frac{1}{3}$.

$$P_1(x) = f\left(\tfrac{1}{3}\right) + f'\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(x - \tfrac{1}{3}\right) \qquad P_1'(x) = f'\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

$$\tilde{I}(P_1) = P_1\left(\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{6} P_1'\left(\tfrac{1}{3}\right) = f\left(\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{6} f'\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

$$E(f) = I(f) - \tilde{I}(f)$$

G.P. $= 1 \Rightarrow E(P_1) = 0$

$$E(f - P_1) = I(f - P_1) - \tilde{I}(f - P_1) = I(f) - \cancel{I(P_1)} - \tilde{I}(f) + \cancel{\tilde{I}(P_1)}$$

$$= I(f - P_1) = \int_0^1 [f(x) - P_1(x)]\, dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{f''(\xi(x))}{2!}\left(x - \tfrac{1}{3}\right)^2 dx}_{\text{resto f. Taylor}} = R(f)$$

- Per maggiorare: sia M tale che $|f''(\xi)| \leq M_2$ (sì per hp $f \in C^2[0,1]$)

$$|R(f)| \leq \frac{M_2}{2} \boxed{\int_0^1 \left(x - \tfrac{1}{3}\right)^2 dx}$$

- Se $\xi(x)$ dipende con continuità da $x \Rightarrow$ Teor media (integrale), $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0$, $\Rightarrow$

$$R(f) = \frac{f''(\eta)}{2} \boxed{\int_0^1 \left(x - \tfrac{1}{3}\right)^2 dx}$$

$$\frac{1}{9}$$

2) Sia $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in [-1,1]$ e P_2 il polinomio che interpola f nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

2.1) Determinare l'espressione di P_2 nella forma di Lagrange e l'espressione dell'errore $E(x) = f(x) - P_2(x)$.

2.2) Fornire una maggiorazione dell'errore $|E(x)|$ nell'intervallo $[-1,1]$.

C. N. 1
Milano
12|2|2015

1

x_i	-1	0	1
y_i	e^{-1}	1	e^{-1}

$$L_0(x) = \frac{x(x-1)}{2}; \quad L_1(x) = -(x+1)(x-1); \quad L_2(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{e}\left[\frac{x^2-x}{2}\right] - x^2 + 1 + \frac{1}{e}\left[\frac{x^2+x}{2}\right] =$$

$$= \frac{x^2}{e} - x^2 + 1$$

$$E(x) = f(x) - P_2(x) = \frac{x(x^2-1)}{6} f'''(t) \qquad -1 < t < 1$$

$$\max_{x\in[-1,1]} |E(x)| \leq \frac{1}{6}\left[\max_{t\in[-1,1]} |t(t^2-1)|\right] \max_{t\in[-1,1]} |f'''(t)|$$

$$\omega(t) = t^3 - t \qquad \omega'(t) = 3t^2 - 1 \geq 0 \qquad t \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \cup t \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left|\omega\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = \left|\omega\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|$$

$$f(t) = e^{-t^2} \qquad f'(t) = -2t\, e^{-t^2} \qquad f''(t) = 2e^{-t^2}[2t^2 - 1]$$

$$f'''(t) = 4t\, e^{-t^2}[3 - 2t^2]$$

$$|f'''(t)| \leq 4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$$

$$|E(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 12 = \frac{4}{9}\sqrt{3} \approx 0.7698$$

3) Dato il sistema lineare $Ax = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

3.1) Determinare l'insieme $\mathcal{J}$ dei valori di α per i quali il metodo di Jacobi converge.

3.2) Determinare per quali $\alpha \in \mathcal{J}$ il metodo di Gauss-Seidel converge.

$$\det(\lambda D - E - F) = 0 \qquad 1^\wedge R - 2^\wedge R \;;\quad 4^\wedge R - 3^\wedge R$$

$$\det\begin{bmatrix} \alpha\lambda & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \alpha\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\lambda & -\alpha\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha\lambda & \alpha\lambda \end{bmatrix}$$

$$\alpha\lambda \begin{vmatrix} \alpha\lambda & -1 & -1 \\ -1 & \alpha\lambda & 0 \\ 0 & -\alpha\lambda & \alpha\lambda \end{vmatrix} + \alpha\lambda \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & \alpha\lambda & 0 \\ 0 & -\alpha\lambda & \alpha\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\alpha\lambda \left\{ \alpha\lambda(\alpha^2\lambda^2) + (-\alpha\lambda - \alpha\lambda) \right\} + \alpha\lambda(-\alpha\lambda - \alpha\lambda) =$$

$$\alpha\lambda \left[\alpha^3\lambda^3 - 2\alpha\lambda - 2\alpha\lambda \right] = 0 \qquad \alpha^2\lambda^2(\alpha^2\lambda^2 - 4) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \qquad \lambda_{3,4} = \pm\frac{2}{\alpha}$$

Convergenza J: $\rho(B_J) = \dfrac{2}{|\alpha|} < 1 \quad |\alpha| > 2 \qquad \mathcal{J} = \{\alpha \in \mathbb{R} : |\alpha| > 2\}$

Per tali valori di α la matrice è diag. domin.

$\Rightarrow$ met. GS converge $\alpha \in \mathcal{J}$.

Calcolo autovalori della matrice di iterazione di G.S. (non necessario se si sfrutta la proprietà D.D $\Rightarrow$ G.S. converge)

$$\det\begin{bmatrix} \alpha\lambda & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha\lambda & -1 & -1 \\ -\lambda & -\lambda & \alpha\lambda & 0 \\ -\lambda & -\lambda & 0 & \alpha\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\alpha\lambda \begin{vmatrix} \alpha\lambda & -1 & -1 \\ -\lambda & \alpha\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & \alpha\lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \alpha\lambda & -1 & -1 \\ -\lambda & 0 & \alpha\lambda \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \alpha\lambda & -1 & -1 \\ -\lambda & \alpha\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha\lambda \left[\alpha^3\lambda^3 + \lambda(-\alpha\lambda) - \lambda(\alpha\lambda) \right] + \lambda(\alpha\lambda)(-\alpha\lambda) + \lambda(-\alpha\lambda)(\alpha\lambda) =$$

$$= \alpha^4\lambda^4 - 2\alpha^2\lambda^3 - 2\alpha^2\lambda^3 = 0$$

$$\alpha^2\lambda^3(\alpha^2\lambda - 4) = 0 \qquad \lambda_{1,2,3} = 0$$

$$\lambda = \frac{4}{\alpha^2}$$

$$\rho(B_{GS}) = \frac{4}{\alpha^2} < 1 \qquad |\alpha| > 2$$

Milano

12/2/2015

4) Data la funzione $g(x) = 1 + a\log x + b\log^2 x$, con $a, b \in \mathbb{R}$, verificare che $\alpha = 1$ è un punto fisso di g.

4.1) Discutere convergenza locale e ordine del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, al variare dei parametri a e b nei casi particolari: $0 < |a| < 1$, $\forall b$; $|a| > 1$, $\forall b$; $a = 0$, $\forall b$.

4.2) Discutere convergenza globale e ordine del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, $x_0 > 0$, nel caso particolare $a = 1$, $b = 0$.

$$g(1) = 1 + a\cdot 0 + b\cdot 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = \frac{a}{x} + \frac{2(\log x)b}{x}$$

$$g'(1) = a$$

- $|a| > 1 \Rightarrow |g'(x)| > 1 \quad x \in I(1) \Rightarrow$ met. it. localmente divergente

- $0 < |a| < 1 \Rightarrow |g'(x)| < 1 \quad x \in I(1) \Rightarrow$ met. it localmente convergente

[Dispensa FZ p. 40, 41]

- $a = 0 \quad g(x) = 1 + b\log^2 x$

$$g'(x) = b\cdot\frac{2\log x}{x} \qquad g'(1) = 0$$

$$g''(x) = 2b\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} \Rightarrow g''(1) = 2b \begin{cases} 0 & \text{se } b = 0 \\ \neq 0 & \text{se } b \neq 0 \end{cases}$$

$a = 0 \wedge b \neq 0$ ordine 2 (localmente convergente.....)

$a = 0 \wedge b = 0 \quad g(x) = 1$

"Banalmente" $\forall x_0 > 0$ convergenza in 1 iterazione

4.2 $\quad a=1 \quad b=0$

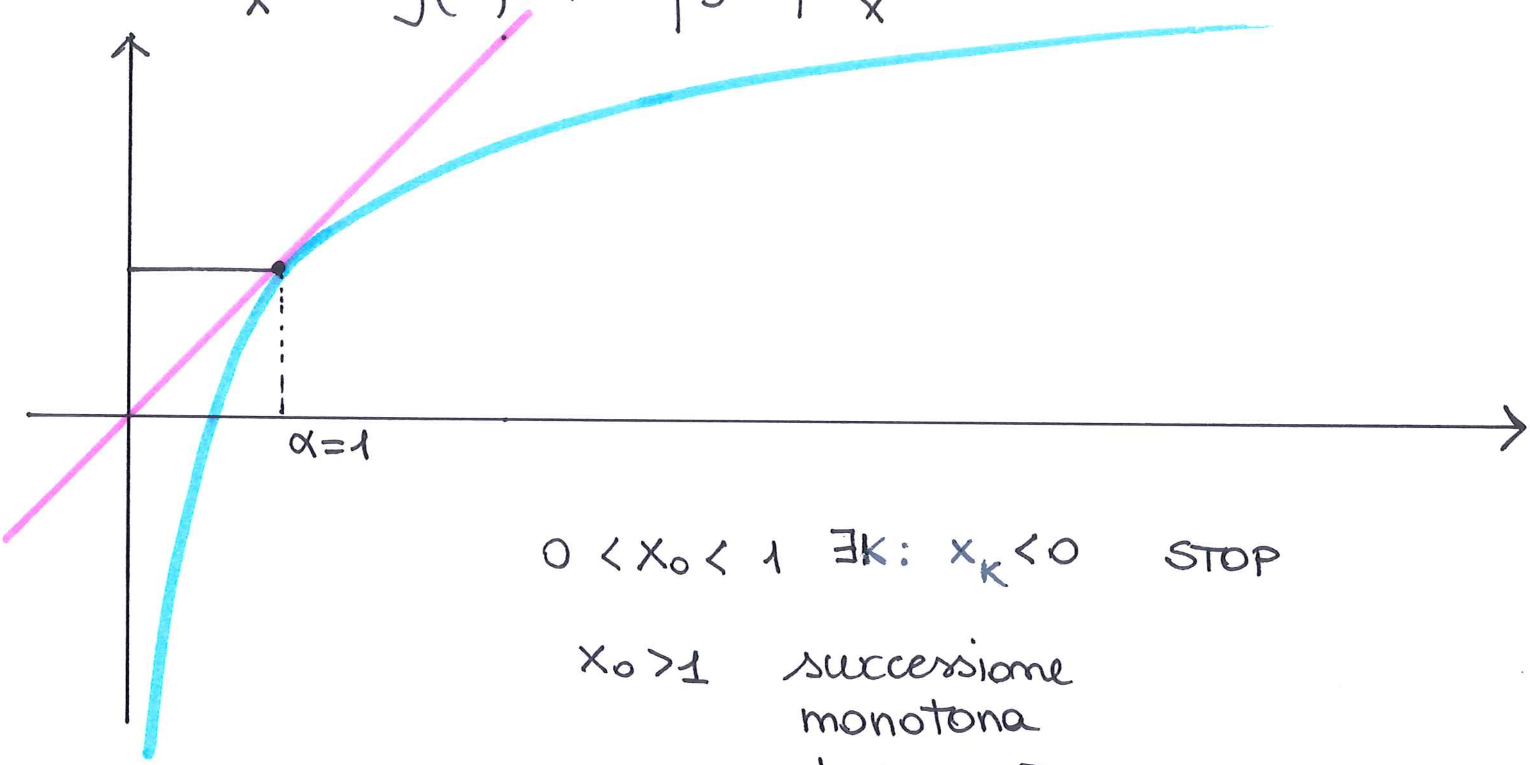
$$g(x) = 1 + \log x$$

$\boxed{CE \quad x>0}$

$g(1)=1$; $\quad \lim_{x\to 0^+}(1+\log x) = -\infty$; $g(x)=0 \quad x=\frac{1}{e}$

$x=0$ A.V.

$g'(x) = \frac{1}{x} \qquad g'(1)=1 \qquad |g'(x)| = \frac{1}{x} < 1 \quad x>1$



$0 < x_0 < 1 \quad \exists K: x_K < 0 \qquad$ STOP

$x_0 > 1 \quad$ successione
monotona
decrescente
limitata
inferiormente

$\downarrow$

$x_n \searrow 1$

ordine 1

5) Assegnate $N > 2$ coppie di dati $\{(x_i, y_i)\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, discutere esistenza, unicità e calcolo della soluzione del problema dell'approssimazione di questi dati nel senso dei minimi quadrati discreti, rispetto alla famiglia di funzioni $\mathcal{G} = \{g(x) = a_1 + a_2 x^2,\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

$$E(a_1, a_2) \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - a_1 - a_2 x_i^2 \right]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - a_1 - a_2 x_i^2 \right](-1) = 0$$

$$N a_1 + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - a_1 - a_2 x_i^2 \right](-x_i^2) = 0$$

$$a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^4 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

$$A\,\underline{a} = \underline{y}$$

Per $\exists!$, calcolo si veda per esempio il caso della retta dei m. q. discreti, ponendo $x_i^2 = t_i$ .....