CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 12 febbraio 2015

1) Sia $f(x) = e^{-x}$. Si vuole approssimare l'integrale

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = e - e^{-1}.$$

- Si consideri per la approssimazione di I una formula di quadratura del tipo $I \simeq I_G = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$, dove i nodi $x_i, i = 0, 1, 2$, sono gli zeri del polinomio $P(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ definito sull'intervallo $(-1, 1)$ e i pesi w_i sono dati dalla formula $w_i = 2/((1 - x_i^2)[P'(x_i)]^2)$, $i = 0, 1, 2$, con $P'(x)$ derivata prima di $P(x)$. Si calcolino nodi e pesi di quadratura, facendo uso per il calcolo dei nodi x_i del comando `roots`.
- Si calcoli quanto vale l'errore commesso $e_G = |I - I_G|$ utilizzando la formula trovata al punto precedente per l'approssimazione di I.
- Si usi ora per approssimare il valore I la formula del punto medio composito, ottenendo il valore approssimato I_{PM}, e si stabilisca empiricamente con l'uso di Matlab il numero minimo n di intervalli necessario per ottenere un errore $e_{PM} = |I - I_{PM}| < e_G$ (attenzione, il valore di n è molto grande!).

  <u>RISULTATI</u>

  $x_0 =$ $\qquad$ $x_1 =$ $\qquad$ $x_2 =$

  $w_0 =$ $\qquad$ $w_1 =$ $\qquad$ $w_2 =$

  $e_G =$ $\qquad$ $n =$

2) Sia $f(x) = \sin x$ e sia $\alpha = 0$ il suo zero che si vuole approssimare.

- Si usi per approssimare α il metodo di bisezione, partendo dall'intervallo $[-\pi/3, \pi/4]$. Quanto vale l'errore dopo due iterazioni del metodo? (attenzione a non contare i punti di partenza inseriti nel vettore delle iterate!)
- Si consideri ora la seguente variante del metodo di bisezione. Dato il generico intervallo su cui opera il metodo, intervallo di estremi a e b tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$:
  1. si sostituisca al valore `x(k)=(a+b)/2`, l'ascissa di intersezione con l'asse delle x della retta $r = a_1 x + a_2$ che passa per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Operativamente, nel codice `bisezione`, ad ogni iterazione del metodo: i) si calcolino i coefficienti a_1, a_2 della retta r usando il comando `polyfit`; ii) si calcoli lo zero della retta trovata con il comando `roots` e sia `x(k)` l'unico zero così calcolato.

2. Si proceda poi nello stesso modo del metodo di bisezione per la scelta dell'intervallo successivo, senza modificare altro. Si usino per approssimare α gli stessi parametri usati al punto precedente. Quanto vale ora l'errore in valore assoluto dopo due iterazioni?

RISULTATI

errore metodo bisezione dopo due iterazioni=

errore metodo bisezione modificato dopo due iterazioni=

3) Calcolare la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con A matrice $n \times n$ data da

$$A = \begin{pmatrix} n & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & n & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & n & 2 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & -2 & n & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & n \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2n+2 \\ 2n \\ 2n \\ ... \\ 2n \\ 2n-2 \end{pmatrix}, \ n = 6, 8, 10,$$

e il determinante della matrice A, sfruttando la fattorizzazione $PA = LU$. Calcolare la soluzione del sistema perturbato $A_\varepsilon \mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{f}$, dove $A_\varepsilon = A + \varepsilon B$,

$$B = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & ... & 2 & 1 \\ 0 & n-1 & n-2 & ... & 2 & 1 \\ 0 & 0 & n-2 & ... & 2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \varepsilon = 10^{-4}, \ 10^{-6}$$

e le perturbazioni relative

$$p_x = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\varepsilon\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}, \quad p_A = \frac{\|A - A_\varepsilon\|_2}{\|A\|_2},$$

sfruttando la fattorizzazione $P_\varepsilon A_\varepsilon = L_\varepsilon U_\varepsilon$.

RISULTATI

		$\det(A)$	p_x	p_A
$n = 6$	$\varepsilon = 10^{-4}$			
$n = 6$	$\varepsilon = 10^{-6}$			
$n = 8$	$\varepsilon = 10^{-4}$			
$n = 8$	$\varepsilon = 10^{-6}$			
$n = 10$	$\varepsilon = 10^{-4}$			
$n = 10$	$\varepsilon = 10^{-6}$			