CALCOLO NUMERICO 1 (12 Febbraio 2015)
COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE

1) Data formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f^{(k)}(1/3) + R(f),$$

dove $n \geq 0$, $f \in C^n[0,1]$ e $R(f)$ rappresenta il resto della formula, determinare il più piccolo valore di n ed i corrispondenti pesi $\{\omega_k\}$ in modo tale che la formula abbia grado di precisione almeno uguale ad uno. Fornire un'espressione del resto $R(f)$ per la formula trovata.

2) Sia $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in [-1,1]$ e P_2 il polinomio che interpola f nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

2.1) Determinare l'espressione di P_2 nella forma di Lagrange e l'espressione dell'errore $E(x) = f(x) - P_2(x)$.

2.2) Fornire una maggiorazione dell'errore $|E(x)|$ nell'intervallo $[-1,1]$.

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

3.1) Determinare l'insieme $\mathcal{J}$ dei valori di α per i quali il metodo di Jacobi converge.

3.2) Determinare per quali $\alpha \in \mathcal{J}$ il metodo di Gauss-Seidel converge.

4) Data la funzione $g(x) = 1 + a \log x + b \log^2 x$, con $a, b \in \mathbb{R}$, verificare che $\alpha = 1$ è un punto fisso di g.

4.1) Discutere convergenza locale e ordine del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, al variare dei parametri a e b nei casi particolari: $0 < |a| < 1$, $\forall b$; $|a| > 1$, $\forall b$; $a = 0$, $\forall b$.

4.2) Discutere convergenza globale e ordine del metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$, $k \geq 0$, $x_0 > 0$, nel caso particolare $a = 1$, $b = 0$.

5) Assegnate $N > 2$ coppie di dati $\{(x_i, y_i)\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, discutere esistenza, unicità e calcolo della soluzione del problema dell'approssimazione di questi dati nel senso dei minimi quadrati discreti, rispetto alla famiglia di funzioni $\mathcal{G} = \{g(x) = a_1 + a_2 x^2,\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.