1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2+\sin\ x}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

e verificare che $K_f(x) \leq \pi, \ \forall x \in [0, 2\pi]$.

MI 18/2/2016

$$f(x) = \frac{2+\sin x + 1}{2+\sin x} = \frac{3+\sin x}{2+\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x(2+\sin x) - \cos x(3+\sin x)}{(2+\sin x)^2} = \frac{\cos x\,(-1)}{(2+\sin x)^2}$$

$$K_f(x) = \left| \frac{x\cos x}{(2+\sin x)^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{2+\sin x}}{3+\sin x} \right| = \left| \frac{x\cos x}{(2+\sin x)(3+\sin x)} \right|$$

$|x| \leq 2\pi$

$|\cos x| \leq 1$

$$\left| \frac{1}{2+\sin x} \right| \leq 1 \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \qquad 1 \leq 2+\sin x \leq 3$$

$$\frac{1}{|2+\sin x|} \leq 1$$

$$\left| \frac{1}{3+\sin x} \right| \leq \frac{1}{2} \qquad 2 \leq 3+\sin x \leq 4$$

$$\frac{1}{|3+\sin x|} \leq \frac{1}{2}$$

$$K_f(x) \leq \frac{2\pi}{2} = \pi$$

2) Data la funzione

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{3},$$

studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l' ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$.

MI 18-2-2016

C.E. $\mathbb{R}$

funzione dispari $g(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{3} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{3} = -g(x)$

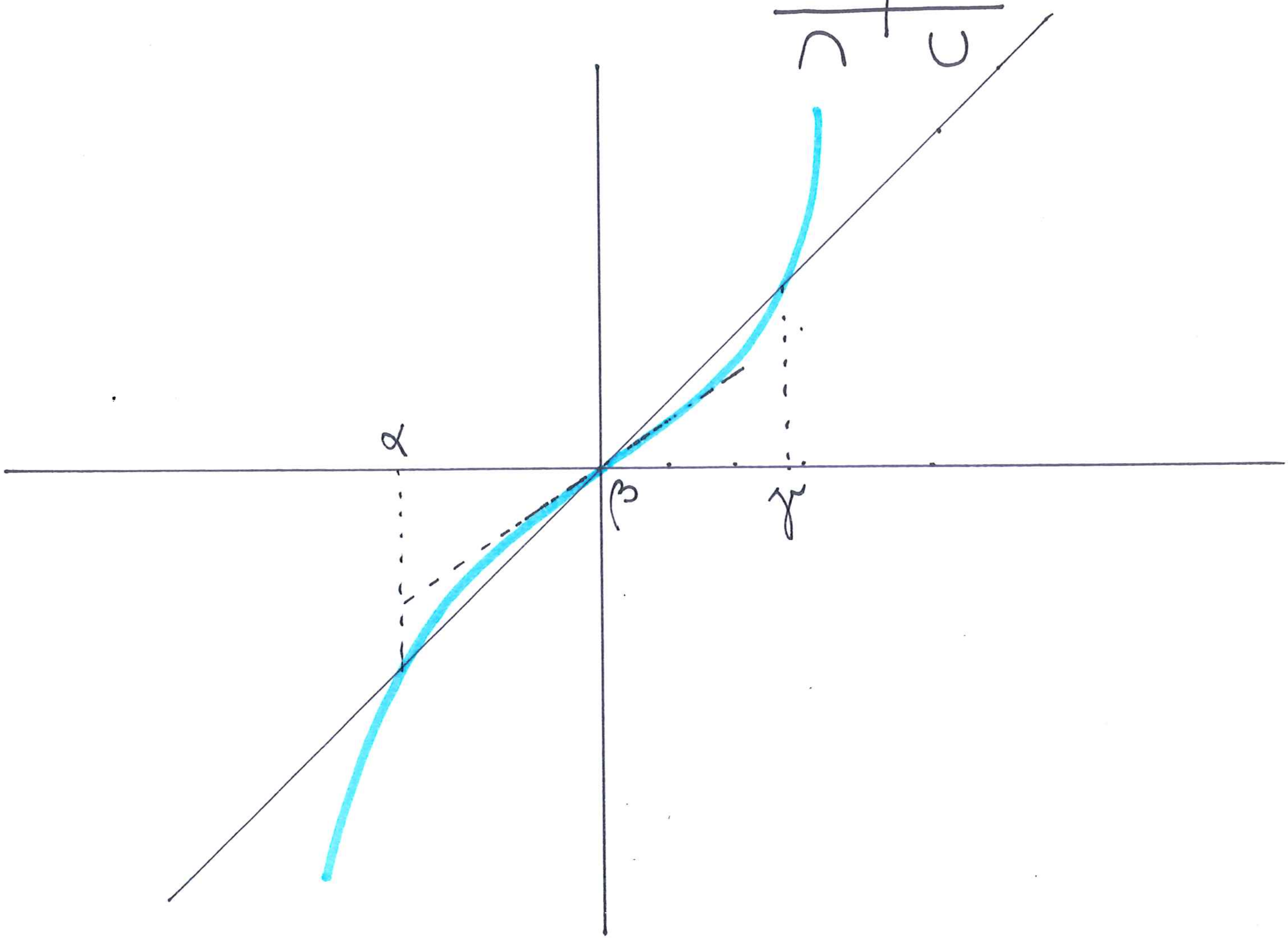
$g(0) = 0$ (punto fisso)

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$g'(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{3} > 0 \quad \forall x$ (crescente) $g'(0) = \frac{2}{3}$

$g''(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{3} > 0 \quad e^{x} > e^{-x} \quad x > 0 \quad F(0;0)$

$$\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline \cap & \cup \end{array}$$



Localizzazione delle radici

x	$g(x)$
0	0
1	> 0.78
2	< 2.14

$-2 < \alpha < -1$

$1 < \gamma < 2$

$1.028 < g'(\gamma) < 2.508 \Rightarrow$ non converge in $I(\alpha)$ in $I(\gamma)$

$g'(0) = \frac{2}{3} < 1$ Converge in $I(\beta)$

Studio della convergenza al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$

$x_0 < \alpha$: successione monotona decrescente illimitata inferiormente $x_n \searrow -\infty$

$\alpha < x_0 < \beta$: succ. mon. cresc. lim. sup. da β: $x_n \nearrow \beta$

$\beta < x_0 < \gamma$: " " decr. " inf da β: $x_n \searrow \beta$

$x_0 > \gamma$: " " cresc. illim. sup : $x_n \nearrow +\infty$

Casi particolari $x_0 = \alpha \lor x_0 = \beta \lor x_0 = \gamma$
successione "costante"

Ordine $g'(\beta) = \frac{2}{3} \neq 0$ 1^ ordine

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3,1},$$

MI 18-2-2016

3.1) studiare la convergenza del metodo di Jacobi;

3.2) studiare la convergenza del metodo iterativo:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \frac{1}{2} M^{-1}\mathbf{b} + M^{-1}N\mathbf{x}^{(n)}, \; n \geq 0, \; \mathbf{x}^{(0)} \text{dato};$$

3.3) stabilire la relazione fra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi.

1) A è diagonalmente dominante => m. di Jacobi converge

2) Consistenza del metodo iterativo con sistema $Ax=b$

$$x = \frac{1}{2} M^{-1} b + M^{-1} N x$$

↳ B_* matrice di iterazione

$$2Mx = b + 2Nx$$

$$2Mx - 2Nx = b \qquad A = 2M - 2N$$

$$B_* = M^{-1}N \qquad \det(M^{-1}N - \lambda I) = 0$$

$$\det(M^{-1}N - \lambda M^{-1}M) = \det M^{-1} \det(N - \lambda M) = 0$$

$$\det(\lambda M - N) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2\lambda & -\frac{1}{2}\lambda & 0 \\ -1 & 2\lambda & -\frac{1}{2}\lambda \\ 0 & -1 & 2\lambda \end{bmatrix} = 2\lambda\left(4\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda\right) + \left(-\frac{1}{2}\lambda\right)(2\lambda) = 8\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda^2 = 8\lambda^3 - 2\lambda^2 =$$

$$2\lambda^2(4\lambda - 1) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 0 \qquad \lambda_3 = \frac{1}{4}$$

$$\rho(B_*) = \frac{1}{4} < 1 \qquad \text{converge}$$

3) Calcolo del raggio spettrale della matrice di iterazione del metodo di Jacobi per stabilire la relazione tra le velocità di convergenza dei due metodi

$$\det(B_J - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 4\lambda & -1 & 0 \\ -2 & 4\lambda & -1 \\ 0 & -2 & 4\lambda \end{bmatrix} = 4\lambda(16\lambda^2 - 2) + 2(-4\lambda) =$$

$$8\lambda(8\lambda^2 - 1 - 1) = 8\lambda(8\lambda^2 - 2) =$$

$$16\lambda(4\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\lambda = 0 \qquad \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$\rho(B_J) = \frac{1}{2} < 1$ (infatti A è diagonalmente dominante)

$$R(B_*) = -\ln\frac{1}{4} = -2\ln\frac{1}{2}$$

$$R(B_J) = -\ln\frac{1}{2} =$$

$$R(B_*) = 2R(B_J)$$

Metodo $*$ ha velocità asintotica di convergenza doppia rispetto al metodo B_J

4) Stimare il numero minimo di intervalli necessari per calcolare l'integrale definito

$$I \equiv \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

con un errore assoluto $\leq 10^{-6}$, utilizzando la formula dei trapezi composita e la stima asintotica dell'errore. Approssimare il valore di I con la formula dei trapezi semplice e calcolare l'errore assoluto commesso.

MI
18/2/2016

$$I = \arcsin x \Big|_0^{1/2} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \approx 0.5235988$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1 \cdot (-2x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$|I - I^T_{comp}| \approx \frac{H^2}{12} \left| f'(0) - f'\left(\frac{1}{2}\right) \right|$$

$$H = \frac{b-a}{M} \Rightarrow H = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{M}$$

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3}} = \frac{1}{96} \cdot \frac{1}{M^2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$\frac{1}{36\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{M^2} \leq 10^{-6} \qquad M^2 \geq \frac{10^6}{36\sqrt{3}} \qquad M \geq \frac{10^3}{6\sqrt[4]{3}} =$$

$$\bar{M} = 127$$

$$I_{semplice} = \frac{\frac{1}{2}}{2} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \right] =$$

$$\frac{1}{4} \left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right] \approx 0.5386751$$

Errore assoluto $= |I - I_{semplice}|$

$\approx 0.015076\ldots$

4) Stimare il numero minimo di intervalli necessari per calcolare l'integrale definito

$$I \equiv \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

con un errore assoluto $\leq 10^{-6}$, utilizzando la formula dei trapezi composita e la stima asintotica dell'errore. Approssimare il valore di I con la formula dei trapezi semplice e calcolare l'errore assoluto commesso.

M1
18/2/2016

$$I = \arcsin x \Big|_0^{1/2} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \approx 0.5235988$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{1\cdot(-2x)}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$|I - I^T_{comp}| \approx \frac{H^2}{12}\left|f'(0) - f'\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$H = \frac{b-a}{M} \Rightarrow H = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{M}$$

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{M^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)^3}} = \frac{1}{96}\cdot\frac{1}{M^2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}\,\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$\frac{1}{36\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{M^2} \leq 10^{-6} \qquad M^2 \geq \frac{10^6}{36\sqrt{3}} \qquad M \geq \frac{10^3}{6\sqrt[4]{3}} =$$

$$\overline{M} = 127$$

$$I_{semplice} = \frac{\frac{1}{2}}{2}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right] =$$

$$\frac{1}{4}\left[1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \approx 0.5386751$$

$$\text{Errore assoluto} = |I - I_{semplice}|$$

$$\approx 0.015076\ldots$$

5) Indicare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste una ed unica funzione

$$\phi(x) = a\sin x + b\cos x + c\sin 2x + d\cos 2x$$

tale che

$$\phi(0) = y_0\ , \quad \phi(\pi) = y_1\ , \quad \phi'(0) = y_2\ , \quad \phi'(\alpha) = y_3$$

per ogni insieme di dati y_0, y_1, y_2, y_3.

MILANO 18/2/2016

$$\phi(x) = a\sin x + b\cos x + c\sin 2x + d\cos 2x$$

$$\phi'(x) = a\cos x - b\,\mathrm{sen}\,x + 2c\cos 2x - 2d\sin 2x$$

$\phi(0) = y_0 \qquad b + d = y_0$

$\phi(\pi) = y_1 \qquad -b + d = y_1$

$\phi'(0) = y_2 \qquad a + 2c = y_2$

$\phi'(\alpha) = y_3 \qquad a\cos\alpha - b\,\mathrm{sen}\,\alpha + 2c\cos 2\alpha - 2d\sin 2\alpha = y_3$

$$D\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha & 2\cos 2\alpha & -2\,\mathrm{sen}\,2\alpha \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -\mathrm{sen}\,\alpha & 2\cos 2\alpha & -2\,\mathrm{sen}\,2\alpha \end{vmatrix} - \cos\alpha \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cos 2\alpha \cdot 2 - \cos\alpha\,(-2)(2) = 4(\cos\alpha - \cos 2\alpha)$$

$\det(A) \neq 0 \qquad \cos\alpha - \cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha = \cos\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha \neq 0$

$2\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 \neq 0 \qquad \cos\alpha \neq 1 \qquad \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 2\pi \Rightarrow \alpha \neq 2k\pi$

$\qquad\qquad \cos\alpha \neq -\frac{1}{2} \qquad \alpha \neq \frac{2}{3}\pi \wedge \alpha \neq \frac{4}{3}\pi$

$\alpha \neq 2k\pi \quad \wedge \quad \alpha \neq \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \wedge \quad \alpha \neq \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$

SINTESI $\boxed{\alpha \neq \frac{2}{3}\pi \cdot k}$