

CALCOLO NUMERICO 1 (18 Febbraio 2016) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

- 1) Calcolare il numero di condizionamento $K_f(x)$ della funzione

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2 + \sin x}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

e verificare che $K_f(x) \leq \pi$, $\forall x \in [0, 2\pi]$.

- 2) Data la funzione

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{3},$$

studiare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza e l'ordine del metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$.

- 3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3,1},$$

- 3.1) studiare la convergenza del metodo di Jacobi;

- 3.2) studiare la convergenza del metodo iterativo:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \frac{1}{2}M^{-1}\mathbf{b} + M^{-1}N\mathbf{x}^{(n)}, \quad n \geq 0, \quad \mathbf{x}^{(0)} \text{ dato};$$

- 3.3) stabilire la relazione fra le velocità asintotiche di convergenza dei due metodi.

- 4) Stimare il numero minimo di intervalli necessari per calcolare l'integrale definito

$$I \equiv \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

con un errore assoluto $\leq 10^{-6}$, utilizzando la formula dei trapezi composta e la stima asintotica dell'errore.

Approssimare il valore di I con la formula dei trapezi semplice e calcolare l'errore assoluto commesso.

- 5) Indicare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste una ed unica funzione

$$\phi(x) = a \sin x + b \cos x + c \sin 2x + d \cos 2x$$

tale che

$$\phi(0) = y_0, \quad \phi(\pi) = y_1, \quad \phi'(0) = y_2, \quad \phi'(\alpha) = y_3$$

per ogni insieme di dati y_0, y_1, y_2, y_3 .