Cognome: ______________________ Nome: ______________________ Matricola: ____________

CALCOLO NUMERICO 1 - PROVA MATLAB - 18 febbraio 2016

1) Sia

$$f(x) = 5\left(x+\frac{3}{5}\right)\left(x+\frac{1}{10}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Si vogliono calcolare le intersezioni $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_2 > 0$ di tale funzione con la circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio unitario centrata nell'origine. A tale scopo:

1.1) si stimino graficamente la posizione delle due intersezioni, riportando sul foglio una versione approssimata del grafico della funzione $f(x)$ e di $\mathcal{C}$.

1.2) dopo averne verificato la applicabilità, si usi il metodo di bisezione per approssimare le intersezioni con `toll=1e-6` e intervalli iniziali $[-1, 0]$ e $[0, 1]$, rispettivamente, per α_1 e α_2. Si calcoli quindi il valore assoluto dell'errore commesso nell'approssimare ciascun punto di intersezione, assumendo come esatti i valori prodotti dalla function Matlab `fzero`.

RISPOSTE

grafico approssimato di f e $\mathcal{C}$ con intersezioni

errore approssimazione α_1: errore approssimazione α_2:

2) Si consideri la matrice a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} I & D \\ D & I \end{pmatrix},$$

dove I è la matrice identità $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ e D è la matrice diagonale $\in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n^2} & 0 & 0 & 0...0 & \\ 0 & \frac{n+2}{n^2} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n+3}{n^2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \frac{2}{n} \end{pmatrix}.$$

Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, di dimensione $2n$, per $n = 10,\ 20,\ 30,\ 40$.

2.1) Si calcoli il numero di condizionamento della matrice A rispetto alla norma 2:

$$K_2(A) = (\|A\|_2\ \|A^{-1}\|_2) = \frac{\max_{1\le i\le 2n}|\lambda_i(A)|}{\min_{1\le i\le 2n}|\lambda_i(A)|},$$

e si riportino i valori di $K_2(A)$, $\max_i|\lambda_i(A)|$ e $\min_i|\lambda_i(A)|$ al variare di n.

2.2) Si costruiscano le matrici di iterazione B_J e B_{GS} relative, rispettivamente, ai metodi di Jacobi e Gauss-Seidel e si riportino i valori dei rispettivi raggi spettrali $\rho(B_J)$ e $\rho(B_{GS})$ al variare di n.

n	$K_2(A)$	$\max_i \lvert\lambda_i(A)\rvert$	$\min_i \lvert\lambda_i(A)\rvert$	$\rho(B_J)$	$\rho(B_{GS})$
10					
20					
30					
40					

3) Si vuole approssimare l'integrale improprio

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{e^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x,$$

con il metodo dei trapezi compositi applicato ai due integrali I_1 e I_2:

$$I_1 = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{e^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x,\;\; I_2 = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{e^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x,$$

con $\varepsilon = 0.01,\ 0.001,\ 0.0001$, utilizzando $m = 250, 500$ sottointervalli su ciascuno dei due sottointervalli $[-1, -\varepsilon]$ e $[\varepsilon, 1]$. Si riportino nella tabella i valori approssimati di $I_\varepsilon = I_1 + I_2$ al variare di m e di ε.

I_ε	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$	$\varepsilon = 0.0001$
$m = 250$			
$m = 500$			