1) Assegnati i nodi $x_0 = -2h$, $x_1 = -h$, $x_2 = h$, $x_3 = 2h$, $h > 0$, la funzione $f(x) = \frac{1}{x+3h}$, $x \in [-2h, 3h]$, e detto p_3 il polinomio algebrico di grado 3 che interpola f nei nodi assegnati, si trovi una maggiore dell'errore di interpolazione:

$$\max_{-2h \le x \le 3h} |f(x) - p_3(x)|.$$

Costruire il polinomio p_3 quando $h = 1$.

MI 16.2.17

$x_0 = -2h, \; x_1 = -h, \; x_2 = h, \; x_3 = 2h$

$f(x) = \frac{1}{x+3h} \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+3h)^2} \; \cdots \; f^{IV}(x) = \frac{24}{(x+3h)^5}$

$n = 3$ (grado)

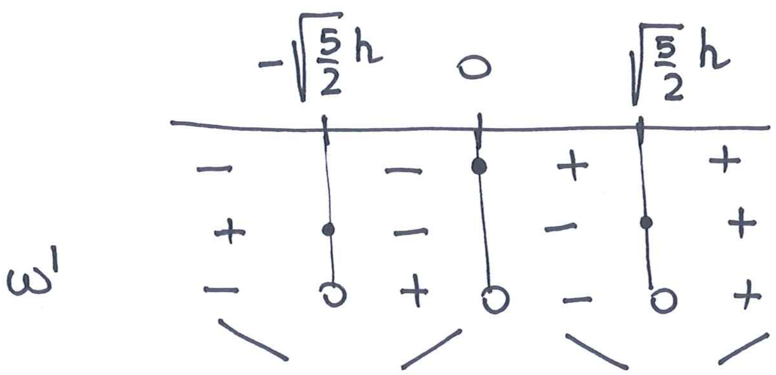
$n+1 = 4$ (nodi)

$$f(x) - p_3(x) = \frac{1}{4!}\,\omega(x)\, f^{(4)}(t_x)$$

$$\omega(x) = (x+2h)(x+h)(x-h)(x-2h) = (x^2-4h^2)(x^2-h^2)$$

$$\max_{-2h \le x \le 3h} |f(x) - p_3(x)| \le \frac{1}{24} \max_{-2h \le x \le 3h} |\omega(x)| \max |f^{(4)}(x)| \; \cdots$$

$$\omega'(x) = 2x(x^2-h^2) + 2x(x^2-4h^2) = 2x\,(2x^2 - 5h^2)$$



$$|\omega(\pm\sqrt{\tfrac{5}{2}}h)| = \left|\left(\tfrac{5}{2}h^2 - 4h^2\right)\left(\tfrac{5}{2}h^2 - h^2\right)\right| = \left(\tfrac{3}{2}h^2\right)\cdot\left(\tfrac{3}{2}h^2\right) = \tfrac{9}{4}h^4$$

$$|\omega(0)| = 4h^2 \cdot h^2 = 4h^4$$

$$|\omega(3h)| = |(9h^2-4h^2)(9h^2-h^2)| = 40h^4 \qquad [\omega(2h) = 0]$$

$$\max_{-2h \le x \le 3h} |\omega(x)| = 40h^4$$

$$f(t) = \frac{1}{t+3h}$$

$$f'(t) = \frac{-1}{(t+3h)^2}$$

$$f''(t) = \frac{2}{(t+3h)^3}$$

$$f'''(t) = \frac{-6}{(t+3h)^4}$$

$$f^{IV}(t) = \frac{24}{(t+3h)^5} \qquad \max_{-2h \le t \le 3h} |f(t)| = \frac{24}{h^5}$$

$$\max_{-2h \le x \le 3h} |f(x) - p_3(x)| \le \frac{1}{24} \cdot 40h^4 \cdot \frac{24}{h^5} = \frac{40}{h}$$

$h = 1 \quad x_i = -2, -1, 1, 2 \qquad f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

$y_i = 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$

$-2 \quad 1$

$-1 \quad \frac{1}{2}$

$1 \quad \frac{1}{4}$

$2 \quad \frac{1}{5}$

$-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$

$-\frac{1}{20}$

$$\frac{-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}{3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{-\frac{1}{20}+\frac{1}{8}}{3} = \frac{3}{40} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{40}$$

$$\frac{\frac{1}{40}-\frac{1}{8}}{4} = \frac{-4}{40} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{40}$$

$$p_3(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+2) + \frac{1}{8}(x+2)(x+1) - \frac{1}{40}(x+2)(x+1)(x-1)$$

2) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x) dx = Af(-1) + Bf(0) + Cf(1),$$

determinare i valori dei pesi A, B, C in modo tale che abbia grado di precisione polinomiale massimo.

M1

16.2.17

• $r=0$ $\quad f(x)=1$

$$\int_{-1}^{1} |x| dx = 1 \qquad A+B+C=1$$

• $r=1$ $\quad f(x)=x$

$$\int_{-1}^{1} |x| x \, dx = 0 \qquad A(-1)+B\cdot 0+C\cdot 1=0$$

$$-A+C=0$$

• $r=2$ $\quad f(x)=x^2$

$$\int_{-1}^{1} |x| x^2 dx = 2\int_{0}^{1} x^3 dx = 2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$A\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot 1=\frac{1}{2}$$

$$A+C=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -A+C=0 \\ A+C=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} B=\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{4} \\ C=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Grado massimo:

Controllo se $r=3$

$$\int_{-1}^{1} |x| x^3 dx = 0$$

$$\frac{1}{4}\cdot(-1)^3+\frac{1}{2}0^3+\frac{1}{4}\cdot(1)^3=0$$

$GR \geq 3$

$r=4$

$$\int_{-1}^{1} |x| x^4 dx = 2\int_{0}^{1} x^5 dx = 2\frac{x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}(-1)^4+\frac{1}{2}\cdot 0^4+\frac{1}{4}(1)^4=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ $\qquad GR=3$

MI 16.2.2017

3) Sia dato il problema della ricerca delle radici dell'equazione non lineare $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

3.1) Verificare che l'equazione non lineare $f(x) = 0$ ha un'unica radice reale.

3.2) Dimostrare che il metodo di Newton converge alla radice $\alpha \in [1, 2]$, $\forall x_0 \in [1, 2]$.

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ $\quad (f \in C^2 \text{ ok})$

$[1, 2]$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 + 2 + 10 - 20 = -7 < 0 \\ f(2) = 8 + 8 + 20 - 20 = 16 > 0 \\ f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 > 0 \quad \forall x \in [1,2] \end{array}\right\} \Rightarrow 3.1$$

$f''(x) = 6x + 4 \geq 0 \quad \forall x \in [1,2]$

$\left| \frac{f(1)}{f'(1)} \right| = \frac{7}{17} < 1 \qquad \left| \frac{f(2)}{f'(2)} \right| = \frac{16}{30} < 1$

$\exists! \, \alpha \in [1, 2]$

mdN converge all'unica radice α che appartiene all'intervallo $[1, 2]$.

4) Dato un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 8 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}:$$

M1

16.2.2017

4.1) trovare per quali valori di a la matrice è definita positiva;

4.2) trovare per quali valori di a la matrice è diagonalmente dominante;

4.3) trovare per quali valori di a il metodo di Jacobi è convergente;

4.4) per tutti i valori di a per i quali la matrice è definita positiva, trovare l'espressione del numero di condizionamento di $K_2(A)$ in funzione di a e verificare che $K_2(A) \geq 4$.

4.1) $\begin{cases} 2>0 \\ 16-a^2>0 \\ \det A>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2>0 \\ |a|<4 \\ 2(16-a^2)-a(2a)>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2>0 \\ |a|<4 \\ |a|<2\sqrt{2} \end{cases}$

4.2) $\begin{cases} |a|<2 \\ 2|a|<8 \end{cases} \Rightarrow |a|<2$

4.3) $\det \begin{vmatrix} 2\lambda & a & 0 \\ a & 8\lambda & a \\ 0 & a & 2\lambda \end{vmatrix} = \dots = 2\lambda(16\lambda^2-2a^2)=0$

$\lambda_1=0$

$\lambda_{2,3} = \pm \frac{a}{2\sqrt{2}}$

Met J converge $\Leftrightarrow$ $|a|<2\sqrt{2}$

4.4) Matrice simmetrica, def pos. $|a|<2\sqrt{2}$

$$K_2(A) = \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$$

$\det \begin{vmatrix} 2-\lambda & a & 0 \\ a & 8-\lambda & a \\ 0 & a & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\quad (2-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+16-2a^2)=0$

$\lambda_1=0$

$\lambda_{2,3} = 5 \pm \sqrt{25-16+2a^2} = 5 \pm \sqrt{9+2a^2}$, $\quad 5 \pm \sqrt{9+2a^2} > 0$

$5-\sqrt{9+2a^2} \geqslant 2 \qquad 3 \geqslant \sqrt{9+2a^2} \Leftrightarrow a=0$

Dunque $\quad 0 < 5-\sqrt{9+2a^2} \leqslant 2 < 5+\sqrt{9+2a^2}$

$$K_2(A) = \frac{5+\sqrt{9+2a^2}}{5-\sqrt{9+2a^2}}$$

$K_2(A) \geq 4$ (N.B. $|a| < 2\sqrt{2}$)

$\Downarrow$

denominatore > 0

$$\frac{5+\sqrt{9+2a^2}}{5-\sqrt{9+2a^2}} \geq 4$$

$$5+\sqrt{9+2a^2} \geq 20 - 4\sqrt{9+2a^2}$$

$$5\sqrt{9+2a^2} \geq 15$$

$$\sqrt{9+2a^2} \geq 3$$

$$9+2a^2 \geq 9$$

$$a^2 \geq 0$$

5) Assegnata la funzione $f(x) = x^2 - 1$, determinare $m \in \mathbb{R}$ in modo tale che sia minima la quantità

$$\int_0^2 (f(x) - mx)^2 \, dx.$$

M1

16.2.2017

$$L(m) = \int_0^2 (f(x) - mx)^2 dx \qquad m \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^2 (x^2 - 1 - mx)^2 dx = \int_0^2 (x^4 + 1 + m^2x^2 - 2x^2 - 2mx^3 + 2mx) dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + x + m^2\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^3}{3} - 2m\frac{x^4}{4} + mx^2 \Big|_0^2$$

$$= \frac{32}{5} + 2 + \frac{8}{3}m^2 - \frac{16}{3} - 8m + 4m =$$

$$\frac{8}{3}m^2 - 4m + C$$

$$L'(m) = \frac{16}{3}m - 4 \geq 0 \qquad m \geq \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$m^* = \frac{3}{4}$$

$$L(m^*) = \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} + \frac{96 + 30 - 80}{15} =$$

$$= \frac{\cancel{8}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{16}_{2}} - 3 + \frac{46}{15} = \frac{45 - 90 + 92}{30} = \frac{47}{30}$$