

CALCOLO NUMERICO 1 (16 Febbraio 2017) - Prova scritta

COMMENTARE TUTTI I PASSAGGI E GIUSTIFICARE LE RISPOSTE

- 1) Assegnati i nodi $x_0 = -2h$, $x_1 = -h$, $x_2 = h$, $x_3 = 2h$, $h > 0$, la funzione $f(x) = \frac{1}{x+3h}$, $x \in [-2h, 3h]$, e detto p_3 il polinomio algebrico di grado 3 che interpola f nei nodi assegnati, si trovi una maggiorazione dell'errore di interpolazione:

$$\max_{-2h \leq x \leq 3h} |f(x) - p_3(x)|.$$

Costruire il polinomio p_3 quando $h = 1$.

- 2) Si consideri la formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 |x|f(x)dx = Af(-1) + Bf(0) + Cf(1),$$

determinare i valori dei pesi A , B , C in modo tale che abbia grado di precisione polinomiale massimo.

- 3) Sia dato il problema della ricerca delle radici dell'equazione non lineare $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.
- 3.1) Verificare che l'equazione non lineare $f(x) = 0$ ha un'unica radice reale.
- 3.2) Dimostrare che il metodo di Newton converge alla radice $\alpha \in [1, 2]$, $\forall x_0 \in [1, 2]$.

- 4) Dato un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 8 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} :$$

- 4.1) trovare per quali valori di a la matrice è definita positiva;
- 4.2) trovare per quali valori di a la matrice è diagonalmente dominante;
- 4.3) trovare per quali valori di a il metodo di Jacobi è convergente;
- 4.4) per tutti i valori di a per i quali la matrice è definita positiva, trovare l'espressione del numero di condizionamento di $K_2(A)$ in funzione di a e verificare che $K_2(A) \geq 4$.
- 5) Assegnata la funzione $f(x) = x^2 - 1$, determinare $m \in \mathbb{R}$ in modo tale che sia minima la quantità

$$\int_0^2 (f(x) - mx)^2 dx.$$