1) Data $f(x) = \sin(\pi x) + a\cos(\pi x)$, $a \in \mathbb{R}$, costruire il polinomio p che interpola f nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$. Calcolare in funzione di a gli errori $e_1 = |f(1) - p(1)|$, $e_2 = |f(-0.5) - p(-0.5)|$ e trovare per quale valore di a si verifica l'uguaglianza $e_1 = e_2$.

Milano 20.2.2018

$$f(x) = \sin(\pi x) + a\cos(\pi x) \qquad a \in \mathbb{R}$$

$x_0 = -1 \quad f(-1) = -a \equiv y_0$

$x_1 = 0 \quad f(0) = a \equiv y_1$

$x_2 = 0.5 \quad f(0.5) = 1 \equiv y_2$

$$\begin{array}{cclcl}
-1 & -a = a_0 & & & \\
 & & 2a = a_1 & & \\
0 & a & & \dfrac{2-4a}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}(2-4a) = a_2 & \\
 & & 2(1-a) & & \\
\frac{1}{2} & 1 & & &
\end{array}$$

$$p(x) = -a + 2a(x+1) + \frac{2}{3}(2-4a)x(x+1) =$$

$$= -a + 2ax + 2a + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}ax^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}ax =$$

$$= \frac{4}{3}(1-2a)x^2 + \frac{2}{3}x(2-a) + a$$

$f(1) = -a \qquad p(1) = \frac{4}{3} - \frac{8}{3}a + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}a + a = \frac{8}{3} - \frac{7}{3}a$

$$e_1 = \left|-a - \frac{8}{3} + \frac{7}{3}a\right| = \left|\frac{4}{3}a - \frac{8}{3}\right|$$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \qquad p\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\cancel{4}}{3}(1-2a)\cdot\frac{1}{\cancel{4}} - \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(2-a) + a =$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a + a = \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}$$

$$e_2 = \left|\frac{2}{3}a - \frac{1}{3} + 1\right| = \left|\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}\right|$$

$e_1 = e_2$

- $\frac{4}{3}a - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}$

  $2a = 10$

  $a = 5$

- $\frac{4}{3}a - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}$

  $6a = 6$

  $a = 1$

2) Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare

$$f(x) \equiv e^x(x-1) = 0,$$

e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, discuterne la convergenza e l'ordine al variare di $x_0 > 0$.

Considerare poi il metodo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\theta f'(x_k)}, \ \theta > 0, \ k \geq 0,$$

e determinare un intervallo I in cui scegliere θ in modo tale che il metodo converga all'unico zero di f per ogni scelta di x_0 in un opportuno intorno dello zero di f.

Milano 20.2.2018

$f(x) = 0 \qquad \alpha = 1$

$f(x) = xe^x - e^x$

$f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

m.d. Newton $\quad g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - \dfrac{\cancel{e^x}(x-1)}{x\,\cancel{e^x}} = x - 1 + \dfrac{1}{x}$

CE $\quad x \neq 0$

$g(x) = x \Leftrightarrow x = 1$

$g(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x} > 0 \qquad x > 0$

As. verticale $x = 0$; As. obliquo $y = x - 1$

$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} > 0 \qquad x < -1 \cup x > 1 \qquad x \neq 0$

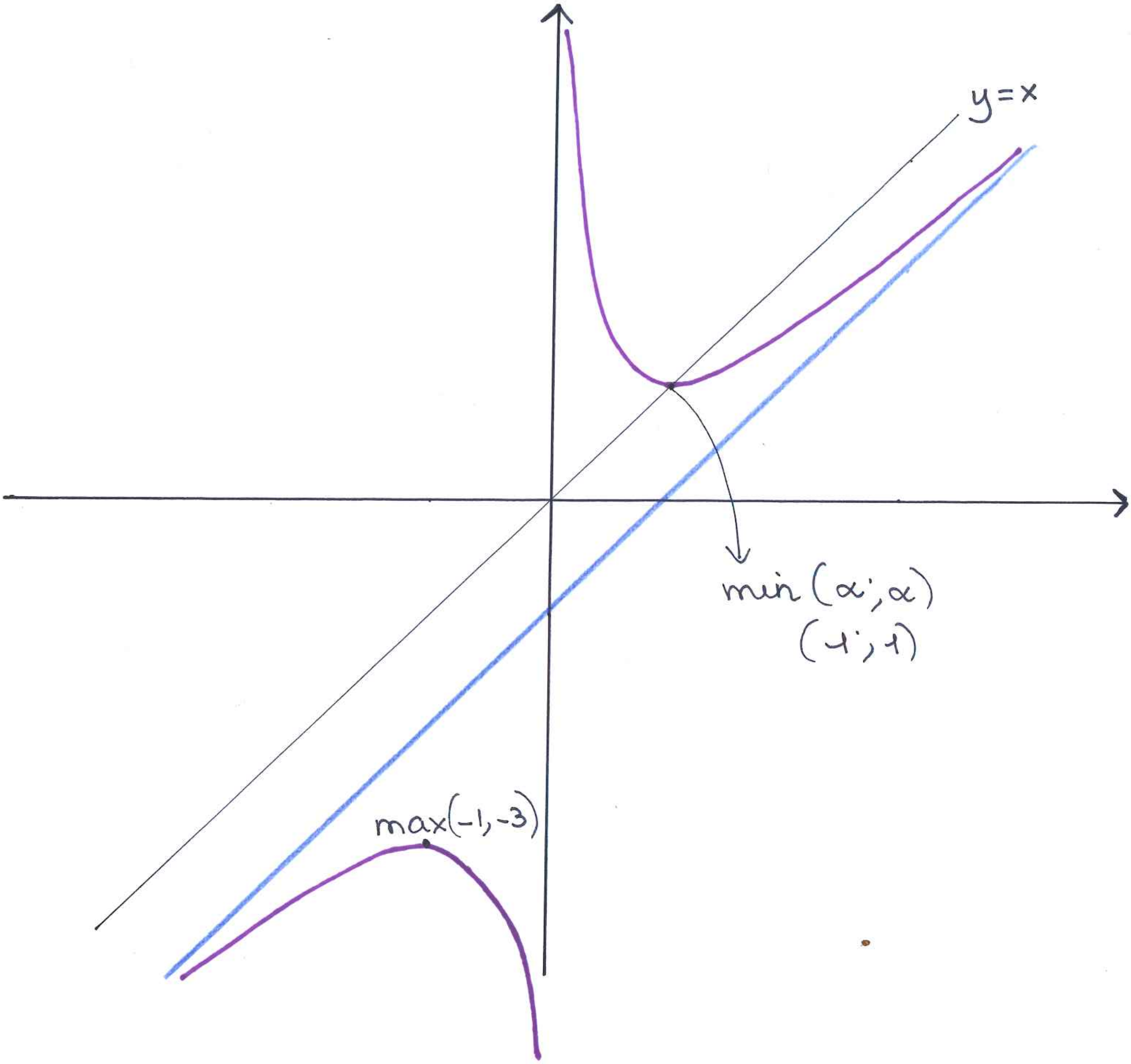
$g''(x) = \dfrac{-2}{x^3}$

		-1		0		1	
g'	$+$		$-$	$\nexists$	$-$		$+$
g	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Max$(-1; -3)$ $\qquad$ Min$(1; 1)$ [p. fisso]

$\Rightarrow$ Convergenza $x_0 \in I(1)$, ordine 2°

$g''(x) \neq 0 \ \forall x \ [\neq 0]$



$x_0 > 0$:

$0 < x_0 < 1 \Rightarrow x_1 > x_0$

$x_0 > 1$: successione monotona decrescente lim. inf da α : $x_n \searrow \alpha$ ORDINE 2.

"$x_0 = 1$": $x_n = 1 \quad \forall n \geq 1$

2° metodo

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{\vartheta f'(x)} \qquad \vartheta > 0$$

$$g(x) = x - \frac{(x-1)\cancel{e^x}}{\vartheta x \cancel{e^x}} = x - \frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta} \cdot \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{\vartheta} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$g'(1) = 1 - \frac{1}{\vartheta} \qquad \left|1 - \frac{1}{\vartheta}\right| < 1$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{\vartheta} < 1 \\ 1 - \frac{1}{\vartheta} > -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 < \frac{1}{\vartheta} & \text{Vero essendo } \vartheta > 0 \\ \frac{1}{\vartheta} < 2 & \vartheta > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Se $\vartheta > \frac{1}{2}$ allora $|g'(1)| < 1$ e il metodo converge ad $\alpha = 1$ $\forall x_0$ scelto in un opportuno intorno di $\alpha = 1$.

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & -2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3,1}$$

determinare tutti e soli i valori di α per i quali:

3.1) A è invertibile;

3.2) Il metodo di Jacobi converge.

3.3) Il metodo di Gauss-Seidel converge.

3.4) Il numero di condizionamento $K_2(A)$ risulta minore di 3.

Milano

20.02.2018

3.1) $\det A = 2(-4-\alpha^2) - \alpha(2\alpha) = -8 - 4\alpha^2 \neq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

3.2) $\det \begin{bmatrix} 2\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & -2\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad 2\lambda(-4\lambda^2 - \alpha^2) - \alpha(2\alpha\lambda) = 0$

$+8\lambda^3 + 2\alpha^2\lambda + 2\alpha^2\lambda = 0$

$2\lambda^3 + \alpha^2\lambda = 0 \qquad \lambda = 0$

$\lambda^2 = -\frac{\alpha^2}{2} \qquad \lambda = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{2}} i$

$\rho(B_J) = \frac{|\alpha|}{\sqrt{2}} < 1 \iff |\alpha| < \sqrt{2}$

3.3) Il metodo di G.S. converge sse converge il metodo di Jacobi, essendo A matrice Tridiagonale.

3.4) $K_2(A) = \dfrac{\max|\lambda(A)|}{\min|\lambda(A)|}$ essendo A matrice simmetrica

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\det \begin{vmatrix} 2-\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & -2-\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(-2-\lambda)(2-\lambda) - \alpha^2\right] - \alpha^2(2-\lambda) = 0$

$(2-\lambda)(-4 + \lambda^2 - \alpha^2 - \alpha^2) = 0 \qquad \lambda = 2$

$\lambda^2 = 2\alpha^2 + 4 \qquad \lambda = \pm\sqrt{2\alpha^2+4}$

$\max|\lambda(A)| = \sqrt{2\alpha^2+4}\ ; \quad \min|\lambda(A)| = 2$

$\left[\begin{array}{l} \text{se } \alpha = 0 \\ \lambda_{1,2} = 2 \quad \lambda_3 = -2 \\ K_2(A) = 1 \end{array}\right]$

$K_2(A) = \frac{\sqrt{2\alpha^2+4}}{2} < 3 \qquad 2\alpha^2 < 36 - 4 \qquad \alpha^2 < 16 \qquad -4 < \alpha < 4$

4) Dato l'integrale definito

$$I = \int_0^4 e^{-x}(x+2)\,\mathrm{d}x,$$

MILANO 20.2.18

si utilizzi la stima classica dell'errore per stimare quanti sottointervalli sono necessari affinchè l'errore assoluto relativo all'approssimazione di I con il metodo dei trapezi compositi utilizzando intervalli di uguale ampiezza sia inferiore a 10^{-3}.

Formula dell'errore:

$$-\frac{(b-a)}{12} H^2 f''(t) \qquad t \in (0,4)$$

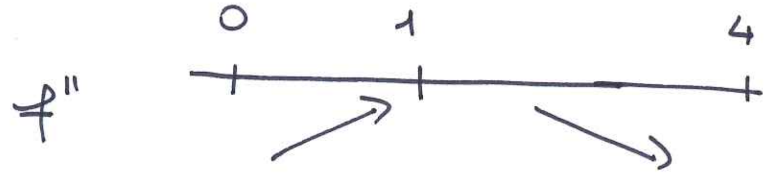
$$\frac{4}{12}\left(\frac{4}{M}\right)^2 \max_{0 \le t \le 4} |f''(t)| < \frac{1}{1000}$$

$$f(t) = te^{-t} + 2e^{-t}$$

$$f'(t) = e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-t} = -te^{-t} - e^{-t}$$

$$f''(t) = -e^{-t} + te^{-t} + e^{-t} = te^{-t}$$

$$f'''(t) = e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t} > 0 \qquad t < 1$$



$$f''(0) = 0$$

$$f''(1) = \frac{1}{e}$$

$$f''(4) = \frac{4}{e^4}$$ (è sufficiente osservare che $f'' \geq 0$ $t \in (0,4)$)

$$\Rightarrow \max |f''(t)| = \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{16}{M^2} \cdot \frac{1}{e} < \frac{1}{1000} \qquad M^2 > \frac{16000}{3e} \approx 1962 \qquad M > 44.3\ldots$$

$$\bar{M} = 45$$

5) Date due matrici convergenti e non singolari $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dire se sono vere (dimostrandolo) o false (fornendo un controesempio) le seguenti affermazioni:

5.1) $A + B$ è convergente;

5.2) $B^{-1}AB$ è convergente;

5.3) $A^{-1}B$ è convergente.

Milano 20.2.18

Una matrice A è convergente $\iff$ $\rho(A) < 1$, dove $\rho(A) = \max |\lambda(A)|$

Dunque $\rho(A) < 1$, $\rho(B) < 1$, $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$

1) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ sono convergenti: $\rho(A) = \frac{1}{2}$ $\rho(B) = \frac{3}{4}$

$A + B = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$ $\rho(A+B) = \frac{5}{4} > 1$ 5.1) FALSO

2) Due matrici simili hanno gli stessi autovalori, $B^{-1}AB$ è simile ad A, dunque se A è convergente lo è anche $B^{-1}AB$. 5.2) VERO

3) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ convergente $\rho(A) = \frac{1}{4}$ $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ convergente $\rho(B) = \frac{1}{2}$

$$A^{-1}B = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A^{-1}B}$$

$\rho(A^{-1}B) = 2 > 1$

Non convergente

5.3) FALSO