CALCOLO NUMERICO (20 febbraio 2018)

[COMMENTARE I PASSAGGI E LE RISPOSTE]

1) Data $f(x) = \sin(\pi x) + a\cos(\pi x)$, $a \in \mathbb{R}$, costruire il polinomio p che interpola f nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$. Calcolare in funzione di a gli errori $e_1 = |f(1) - p(1)|$, $e_2 = |f(-0.5) - p(-0.5)|$ e trovare per quale valore di a si verifica l'uguaglianza $e_1 = e_2$.

2) Applicare il metodo di Newton all'equazione non lineare

$$f(x) \equiv e^x(x-1) = 0,$$

e, dopo avere espresso il metodo di Newton nella forma $x_{k+1} = g(x_k)$, discuterne la convergenza e l'ordine al variare di $x_0 > 0$.

Considerare poi il metodo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\theta f'(x_k)}, \ \theta > 0, \ k \geq 0,$$

e determinare un intervallo I in cui scegliere θ in modo tale che il metodo converga all'unico zero di f per ogni scelta di x_0 in un opportuno intorno dello zero di f.

3) Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & -2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{3,1}$$

determinare tutti e soli i valori di α per i quali:

3.1) A è invertibile;

3.2) Il metodo di Jacobi converge.

3.3) Il metodo di Gauss-Seidel converge.

3.4) Il numero di condizionamento $K_2(A)$ risulta minore di 3.

4) Dato l'integrale definito

$$I = \int_0^4 e^{-x}(x+2)\,\mathrm{d}x,$$

si utilizzi la stima classica dell'errore per stimare quanti sottointervalli sono necessari affinchè l'errore assoluto relativo all'approssimazione di I con il metodo dei trapezi compositi utilizzando intervalli di uguale ampiezza sia inferiore a 10^{-3}.

5) Date due matrici convergenti e non singolari $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dire se sono vere (dimostrandolo) o false (fornendo un controesempio) le seguenti affermazioni:

5.1) $A + B$ è convergente;

5.2) $B^{-1}AB$ è convergente;

5.3) $A^{-1}B$ è convergente.